This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Dette er en digital kopi af en bog, der har været bevaret i generationer på bibliotekshylder, før den omhyggeligt er scannet af Google som del af et projekt, der går ud på at gøre verdens bøger tilgængelige online.

Den har overlevet længe nok til, at ophavsretten er udløbet, og til at bogen er blevet offentlig ejendom. En offentligt ejet bog er en bog, der aldrig har været underlagt copyright, eller hvor de juridiske copyrightvilkår er udløbet. Om en bog er offentlig ejendom varierer fra land til land. Bøger, der er offentlig ejendom, er vores indblik i fortiden og repræsenterer en rigdom af historie, kultur og viden, der ofte er vanskelig at opdage.

Mærker, kommentarer og andre marginalnoter, der er vises i det oprindelige bind, vises i denne fil - en påmindelse om denne bogs lange rejse fra udgiver til et bibliotek og endelig til dig.

Retningslinjer for anvendelse

Google er stolte over at indgå partnerskaber med biblioteker om at digitalisere offentligt ejede materialer og gøre dem bredt tilgængelige. Offentligt ejede bøger tilhører alle og vi er blot deres vogtere. Selvom dette arbejde er kostbart, så har vi taget skridt i retning af at forhindre misbrug fra kommerciel side, herunder placering af tekniske begrænsninger på automatiserede forespørgsler for fortsat at kunne tilvejebringe denne kilde.

Vi beder dig også om følgende:

- Anvend kun disse filer til ikke-kommercielt brug
  Vi designede Google Bogsøgning til enkeltpersoner, og vi beder dig om at bruge disse filer til personlige, ikke-kommercielle formål.
- Undlad at bruge automatiserede forespørgsler
  Undlad at sende automatiserede søgninger af nogen som helst art til Googles system. Hvis du foretager undersøgelse af maskinoversættelse, optisk tegngenkendelse eller andre områder, hvor adgangen til store mængder tekst er nyttig, bør du kontakte os. Vi opmuntrer til anvendelse af offentligt ejede materialer til disse formål, og kan måske hjælpe.
- Bevar tilegnelse
  Det Google-"vandmærke" du ser på hver fil er en vigtig måde at fortælle mennesker om dette projekt og hjælpe dem med at finde yderligere materialer ved brug af Google Bogsøgning. Lad være med at fjerne det.
- Overhold reglerne
  Uanset hvad du bruger, skal du huske, at du er ansvarlig for at sikre, at det du gør er lovligt. Antag ikke, at bare fordi vi tror, at en bog er offentlig ejendom for brugere i USA, at værket også er offentlig ejendom for brugere i andre lande. Om en bog stadig er underlagt copyright varierer fra land til land, og vi kan ikke tilbyde vejledning i, om en bestemt anvendelse af en bog er tilladt. Antag ikke at en bogs tilstedeværelse i Google Bogsøgning betyder, at den kan bruges på enhver måde overalt i verden. Erstatningspligten for krænkelse af copyright kan være ganske alvorlig.

Om Google Bogsøgning

Det er Googles mission at organisere alverdens oplysninger for at gøre dem almindeligt tilgængelige og nyttige. Google Bogsøgning hjælper læsere med at opdage alverdens bøger, samtidig med at det hjælper forfattere og udgivere med at nå nye målgrupper. Du kan søge gennem hele teksten i denne bog på internettet på `http://books.google.com`

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06907958 4

Mathematik og Dialektik.

En philosophisk Afhandling

af

R. Nielsen,
Professor i Philosophien.

Kjøbenhavn.
Forlagt af den Gyldendalske Boghandling (F. Hegel).
Thieles Bogtrykkeri.
1859.

Nielsen
3-0EF

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
914762
ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS
R. 1920 L

Hvad der er Livsprincipet i Videnskaben, bør aldrig, af misforstaaet Hensyn paa Populariteten, opoffres eller endog blot tilhylles; hvo som ikke har Evne og Villie til at fatte de philosophiske Gjenstande i deres Sandhed, maa hellere reent lade være at beskjæftige sig med dem.

J. L. Heiberg.

Forord.

At tilveiebringe god Forstaaelse mellem Mathematik og Philosophie er endda ikke saa ganske let, skjøndt man ifølge Platos Vink næsten skulde mene, at Tingen gik som af sig selv.

Den platoniske Anskuelse, at Mathematiken væsentlig maa betragtes som en Forskole for Dialektiken, er især udviklet i Læren om Staten (6te og 7de Bog). Det Mathematiske, der ligger paa Grændsen af det Synlige og det Usynlige, egner sig just til at fremhjælpe Abstractionen. „De, der beskjæftige sig med Geometrie og Arithmetik og andre mathematiske Videnskaber, forudsætte i enhver Beviisførelse visse Ting, som det Lige og det Ulige, Figurer, tre Slags Vinkler og andet hermed Beslægtet. Sjælen er ved disse Undersøgelser nødt til at betjene sig af Forudsætninger, ikke for at komme til den første Grund, thi den kan ikke gaae ud over disse Forudsætninger, men den bruger Billeder laante fra de jordiske og sandselige Ting, og vælger iblandt disse dem, der maae ansees for at have størst Tydelighed og maae agtes høist". „Er Talen saaledes om et Qvadrat og dets Diagonal, føre de ikke Beviset for dets Skyld, som de tegne, men de have Qvadratet selv i Tankerne"; de betjene sig ved alt Andet, hvad de danne og tegne, ligeledes kun af Billeder, „idet de tragte efter at erkjende hiint selv, som kun sees med Forstanden". Tallet og Eenheden høre endvidere til det i Gjenstandene, der særlig opfordrer til Tænkning. „Thi ifald

Eenheden i og for sig selv kunde tilstrækkelig opfattes ved Synet eller ved en anden Sands, saa kunde den vel ikke føre os til det Værende ...; men, naar den aldrig sees uden med en Modsætning af den, saa at ingen Ting mere viser sig som een, end som det Modsatte, da er vistnok en Dommer nødvendig, der kan afgjøre Sagen, og Sjælen maa nødvendig blive tvivlraadig, og sætte alle sine Tanker i Bevægelse for igjennem en Undersøgelse at finde Svar paa det Spørgsmaal, hvad dog Eenheden i og for sig er". — „Regne- og Tællekunsten, der er nødvendig saavel for Krigeren, som for Philosophen, egner sig derfor ganske til ved Lov at indføres i Staten, og vi bør overtale dem, der skulle tage Deel i de høieste Statsforretninger, at give sig af med Regnekunsten, ikke paa den almindelige Maade, men saaledes, at de ved den rene Tænkning komme til Anskuelse af Tallenes Natur, og at lære den, ikke for som Kjøbmænd og Kræmmere at bruge den ved Kjøb og Salg, men deels for at anvende den i Krigen, og deels for at gjøre det lettere for Sjælen at hæve sig fra det Forgjængelige og Foranderlige til det Sande og Værende".

Denne Platos Opfattelse af Mathematiken er jo vistnok noget eensidig, thi Mathematiken er ikke for Krigens Skyld og ikke for Philosophiens Skyld; den er oprindelig for sin egen Skyld. Men dersom Mathematiken, fordi den er og maa være en af Philosophien uafhængig Videnskab, nu ogsaa vilde gjøre sig uafhængig af det Almeenvidenskabelige, og derved løsrive sig fra den humane Aandsretning, vilde Eensidigheden dog vistnok blive endnu større og derhos mere betænkelig.

Hvorledes man skal drive det, naar man ret vil drive det til at blive Stokmathematiker, har en fransk Forfatter fra det 18de Aarhundrede (Saverien: Histoire du Calcul des Infiniment-Petit) angivet i træffende Charakteristik. Talen er om Maclaurins Indsigelser imod at betragte det uendelig Lille og det uendelig Store som Størrelser, efter-

som Overgangen fra det Endelige til det Uendelige er aldeles ubegribelig. „Imidlertid“ — det er en Synsmaade, Forfatteren tænker sig indført — „ere jo dog de Consequenser, man udleder af hine ubegribelige Forudsætninger, reelle Sandheder. Og hvad gjør saa det til Sagen, at det opstillede Princip er ubegribeligt, naar det kun leder os til at opdage en Sandhed?“ Denne Synsmaade bliver dog afviist, og det af følgende Grunde. „For det Første“, svarer Forfatteren, „kunne vi, naar Principet er ubekjendt, jo ikke vide, om ogsaa alle deraf følgende Consequenser lade sig indrømme: vi gaae som i Blinde, og det turde hænde sig, at vi efter møisommelig Anstrengelse tilsidst stødte paa Noget, som netop udviste Principets Natur, d. v. s. paa Noget, vi ikke kunde begribe. For det Andet“, spørger han: „er det dog ikke en skammelig Nedværdigelse af Fornuften, at lade den følge en Sammenkjædning af Led, en Række, hvis Begyndelse og Ende, den ikke kan gjennemskue? Det er et stort Onde, der fødes af den Slags Routine: vant til at operere uden at indsee Grunden taber Aanden al Øvelse i at tænke, og ender med at udføre Alt ganske maskinmæssig. Aussi voit-on les jeunes Gens les plus incapables de refléxions devenir facilement habiles Calculateurs... Comme on croit que cette aptitude est un fruit du génie on fait sonner bien haut ce succès; et un enfant se trouve grand Homme, sans qu' il se soit encore avisé de penser. Les éloges qu'on lui croit dûs et qu'on ne cesse de lui prodiguer, le persuadent. En faut-il davantage pour faire éclorre dans lui l'orgueil, enfant chéri de l'ignorance, et pour le rendre dans la suite un homme vain presque inutile à la Société et toûjours insupportable“.

Vistnok er det endda ikke saa sjældent, at en „enfant chéri de l'ignorance“, en saadan uopdragen lille „grand Homme“ siden hen arbeider sig op til at blive noget Mere end „habile Calculateur“, til at blive Mathematiker, endog dygtig Mathematiker og virksomt Medlem i Samfundet; men

mathematisk Formel eller fra Misforstaaelse af et enkelt Udtryk øieblikkelig og uden videre slutte til Ukyndighed i det Mathematiske: da blive her mange Ukyndige, da ere D'Alembert og Euler jo ogsaa Ukyndige, ja, da er Cartesius en Stymper, og Nutidens „strenge Kritik“ tør svinge Corporalstaven over Newton og Leibnitz.

En tredie Forudsætning er, at den Mathematiker, der vil indlade sig paa at bedømme det i Mathematiken Philosophiske, allerførst maa gjøre sig den Uleilighed at sætte sig nogenledes ind i hele den philosophiske Tankegang, hvoraf Behandlingen særlig fremgaaer, og derhos vide at holde Mathematikens og Philosophiens forskjellige Synsmaader saaledes ud fra hinanden, at de behørig kunne sammenstilles, og opklares ved hinanden indbyrdes. Vistnok er det af Vigtighed, at Unøiagtigheder paavises og begaaede Feil rettes; men der er Et, der i videnskabelig Forstand er endnu vigtigere, og det er, at der udtrykkelig skjelnes imellem væsentlige og uvæsentlige Feiltagelser, en Adskillelse, der i Undersøgelsen angaaende Forholdet imellem Philosophie og Mathematik er saameget mere uafviselig, som ingen videnskabelig Dannet vil kunne negte, at Meget, naar det sees fra Philosophiens Side, og tilmed i et Udkast, en skizzeret Fremstilling, mere antydes end udvikles, kan være aldeles uvæsentligt, medens det i en mathematisk og derhos udførlig Lærebog vilde være endog meget væsentligt. Ved enten slet ikke at agte paa denne Forskjel, eller bedre: ved udtrykkelig at indrømme den i Ord, for siden under Bedømmelsen selv at fornegte den i Gjerning, er det en let Sag at forstørre uvæsentlige Feil, en ringe Kunst at gjøre Philosophiens Myg til mathematiske Elephanter og imponere Læseren ved mange Elephanter.

At slige Forudsætninger, som kun med Hensyn paa det Videnskabelige ere ufravigelige, naturligviis ikke tør være generende for Saadanne, som ellers fra deres eget Standpunkt maatte føle sig tilskyndede til at betænke nærværende

Afhandling med „en streng Kritik“, forstaaer sig vel af sig selv. Er Været opgivet og Markleddet aabent, da maatte den Forfatter i Sandhed være meget naiv, der vilde mene, at nogle Sætninger, opstillede i et Forord, kunde være ham enten Værn mod de Løse, eller Hegn mod de Brølende, mod dem paa Literaturens Overdrev, som ville stange; nei, de opstillede Sætninger skulle ingenlunde foreskrive Pligter for Mathematikens Hornqvæg, de skulle kun være forpligtende for Forfatteren selv og for dem, der med ham ville noget Videnskabeligt.

Skulde en Bedømmelse af foreliggende Afhandling, ved at holde sig til de opstillede Forudsætninger, enten virkelig eller formeentlig kunne paavise betænkelige Feil og Misgreb: erklærer Forfatteren sig herved pligtig til at staae den navngivne Recensent, han høre nu forøvrigt blandt de Yngre eller blandt de Ældre, blandt Autoriteter eller Ikke-Autoriteter, paa enhver Maade til Regnskab, at Sagen dog tilsidst maa kunne klares; hvorimod — og dette bliver herved ligeledes udtrykkelig fastsat — ethvert Forsøg til Kritik, som ved at gjøre Brud paa de nævnte Sætninger, forvexler Væsentligt med Uvæsentligt, og forvirrer Synspunkterne, bliver at afvise som ubeføiet, Forsøget komme for Resten fra en lille eller fra en stor Autoritet, og byde, hvad det vil, og være som det vil, med grovt Sand eller med fiint Sand, med ringe Anseelse, eller med Brask og Bram.

Kjøbenhavn i December 1859.

R. Nielsen.

Mathematik og Philosophie ere forskjelligartede Videnskaber; de maae desaarsag hævde hver sin Selvstændighed. Mathematiken er en exact, Philosophien en dialektisk Videnskab. Som exact Videnskab har Mathematiken ingen Brug for Philosophien; som dialektisk Videnskab har Philosophien derimod Brug for Mathematiken; den exacte Videnskab forholder sig til sig selv ved Udelukkelse af andre Videnskaber; den dialektiske Videnskab forholder sig gjennem andre Videnskaber til sig selv.[1])

Fra Erkjendelseslærens Standpunkt bliver Philosophiens Forhold til sig selv gjennem det Mathematiske da i Almindelighed at bestemme saaledes: Mathematiken fastsætter sine Begreber i den exacte Form; de saaledes fastsatte Begreber kunne ikke uden videre overføres i Philosophien; derimod kan den philosophiske Dialektik ved at bringe de exacte Forholdsbestemmelser til Bevidsthed vinde i Klarhed og Skarphed, og saaledes opnaae den Punktlighed, som Tingenes Erkjendelse nødvendig maa forudsætte. For at paavise, hvorledes Erkjendelseslæren articulerer den dialektiske Begrebsudvikling ved Momenter af den exacte Analyse, lade vi i nærværende Afhandling Fremstillingen dreie sig om tre Hovedpunkter: I. Functionsbegrebet, II. Uendelighedsproblemet og III. Det Uendeliges Analyse.

---

[1]) Jvfr. Philos. Propædeut. i Grundtræk 1857, S. 99 § 22.

I.

Functionsbegrebet.

At Begrebet: „Function“ ikke udelukkende tilhører Mathematiken, er bekjendt. [1]) Ligesom Anskuelserne, ifølge Kant, beroe paa „Affectioner“, beroe Begreberne paa „Functioner“: „Ich verstehe aber unter Function die Einheit der Handlung verschiedene Vorstellungen unter einer gemeinschaftlichen zu ordnen.“ (Kritik der r. V.) Den Handlingens Eenhed, hvorved Kant charakteriserer Forstandsvirksomheden fra det almeenlogiske Synspunkt, er, som man let seer, i væsentligt Slægtskab med den Handlingens Eenhed, hvorved Forstanden opfatter den mathematiske Relation mellem afhængige og uafhængige Størrelser; kun at Forskjellen ikke oversees. Udenfor Mathematiken falder, hvad Functionskategorien angaaer, Eftertrykket paa den lovbestemte Handling, i Mathematiken derimod paa det Afhængighedsforhold, hvorved Handlingen (Operationen) bestemmes; udenfor Mathematiken opfattes Kategorien fornemmelig fra den active, i Mathematiken, om man vil, fra den passive eller dog neutrale Side. „En Størrelse, der afhænger af een eller flere vilkaarlige Størrelser, hvormed den altsaa kan tænkes forbunden ved en Ligning, kaldes en Function af denne eller disse. Saaledes er t. Ex. ax^3 en Function af x, idet a tænkes uforandret, Logarithmen en Function af Tallet, Sinus (som Linie) en Function af Radius og Buen o. s. fr.“ [2])

Den særegne Betydning, Kategorien saaledes har erholdt i Mathematiken, skal nu afgive Bidrag til en philosophisk Udvikling af samme Kategorie, idet vi undersøge Begrebets Reqvisiter, dets Forhold til Loven, og dets eiendommelige Fremstilling.

---

[1]) Jvfr. Phil. og Mathem. S. 5—6.

[2]) Chr. Jürgensen. Begyndelsesgrundene af den mathematiske Analyse. Kbhvn 1855. S. 18.

a) Functionens oprindelige Requisiter.

Til eiendommelig Bestemmelse af den mathematiske Function kræves:

α) en constant og en variabel Størrelse.

I Udtrykket: $f(x) = ax$ er a constant, x variabel; i Udtrykket $f(a) = ax$ er x derimod constant og a variabel. Kan nu enhver Størrelse ifølge sit Begreb være snart constant, snart variabel efter Omstændighederne; saa sees allerede heraf, hvor let Mathematikens Axiom: „enhver Størrelse er lig sig selv", kan angribes af Dialektiken. At enhver endelig Størrelse maa, forsaavidt den er constant, være sig selv lig: $a = a$, er uimodsigeligt; men hvorledes forholder det sig med den variable Størrelse? Den variable Størrelse maa jo, ifølge Begrebet, uophørlig kunne afvige fra en hvilkensom helst given Værdi, og just derved i Ligheden med sig selv blive sig selv ulig: $x \overset{>}{\underset{<}{=}} x$. Vilde man, for at hævde den opstillede Grundsætnings exacte Gyldighed, opfatte den variable Størrelse, x, som en foreløbig Betegnelse, et collectivt Udtryk, der siger, at x ved at antage hvilkesomhelst Værdier opløser sig i en Fleerhed af constante Størrelser: $a = a$, $b = b$, $c = c$ o. s. v.; da havde man herved ikke blot, hvad der i andre Henseender er mathematisk utilladeligt, gjort den variable Størrelse til Eet med den vilkaarlige, men endog aldeles ophævet den variable Størrelses Begreb. At Bestemmelsen: variabel ligesaa væsentlig tilkommer Størrelsen, som Bestemmelsen constant, sees deraf, at Størrelsen netop defineres som det, der kan forøges og formindskes.[1])

---

[1]) Alt, hvad der kan tænkes forøget eller formindsket, og som kan opløses i eensartede Dele, kaldes Størrelse (quantum), og siges at besidde Storhed (quantitas). Ramus: Elementær Geometrie. 1850. Indledn.

Vilde man i Tillid til den formelle Logiks øverste Grundsætning forklare $x = x$ saaledes: det Variable maa, forsaavidt det ikke er constant, nødvendigviis ligne sig selv deri, at det er variabelt; da vilde man med samme Ret, som naar man siger: det Variable er variabelt, altsaa: $x = x$, ogsaa kunne sige: det Uendelige er uendeligt, altsaa: $\infty = \infty$; men imod en saadan Forklaring maa Mathematiken protestere. Hvad betyder ∞? Dersom ∞ ikke betegner en Størrelse, saa er Ligningen $\infty = \infty$ meningsløs; det maatte da i logisk Almindelighed hedde: det Uendelige er, hvad det er, en Størrelsesnegation. Skal det Uendelige derimod opfattes som Størrelse, da er Ligningen: $\infty = \infty$ jo incomplet, d. e. ligesaa ugyldig som gyldig: $\infty \gtreqless \infty$ er det fuldstændige Udtryk. At lægge Eftertryk paa Forskjellen imellem den bestemte og den endnu ubestemte Størrelse hjælper ikke. Er den endelige Størrelse efter sit Begreb bestemt ved Modsætning til den uendelige, da er den uendelige jo med det Samme bestemt ved Modsætning til den endelige; ere de endelige Størrelser at bestemme ved deres Forhold til hverandre indbyrdes, maa et Tilsvarende jo gjælde om de uendelige.

Det opstillede Axiom: „enhver Størrelse er lig sig selv“, har altsaa nu opløst sig i to Sætninger, af hvilke den første er en Tautologie, den anden en Modsigelse. Det er nemlig ikke Størrelsen som Størrelse, men Størrelsen som constant Størrelse, der er lig sig selv; Eftertrykket falder ikke paa det at være Størrelse, men paa det at være constant Størrelse. Og hvad er saa en constant Størrelse? En Størrelse, der er sig selv lig. Altsaa siger Axiomet: en Størrelse, der er sig selv lig, er sig selv lig; en reen Tautologie! Opfattes dernæst Størrelsen som det, „der kan tænkes forøget eller formindsket“, saa falder Eftertrykket ikke paa det at være Størrelse, men paa det at være variabel

Størrelse; det Variable maa vise sig i Varieren; den variable Størrelse, der ifølge Axiomet jo ogsaa skulde være sig selv lig, kan altsaa kun ligne sig selv deri, at den bestandig bliver sig selv ulig, hvilket er en Modsigelse.

Disse Vanskeligheder hæves, naar vi see paa Functionen. Functionsbegrebet er, dialektisk seet, det sande Størrelsesbegreb, efterdi Størrelsens dobbeltsidige Bestemmelse, at være constant, d. e. sig selv lig og dog variabel, d. e. sig selv ulig, her sættes i Eenhed. Kan man end ikke umiddelbart sige: $x = x$, forsaavidt x er variabel, saa kan man dog med Sandhed sige: $f(x) = ax = f(x)$, efterdi den samme Function maa som Function under alle Forandringer være sig selv lig.[1] Idet Tautologien er hævet, er Modsigelsen med det Samme ophævet. Det Ulige staaer ikke længere som abstract Negation ligeoverfor det Lige, eller det Variable ligeoverfor det Constante; Functionen lader just det Lige reflectere sig i det Ulige, det Variable i det Constante, Forskjelsmomentet i Identiteten.

Til Functionsbegrebets nødvendige Reqvisiter hører endvidere:

β) To variable Størrelser, en uafhængig og en afhængig.[2])

I Ligningen: $f(x) = y = ax$ ere Størrelserne x og y foranderlige, men saaledes, at x er uafhængig, y afhængig. Forandringen i x forholder sig da til Forandringen i y som Forudsætning til Conseqvens, som Grund til Følge. Da Functionsbegrebet netop viser os Forudsætningens og Conseqvensens, det Uafhængiges og det Afhængiges reflecterede Eenhed, kan Forskjellen imellem den blotte Forudsætning og den egentlige Grund i denne Sammenhæng oplyses. Forud-

---

[1]) Altsaa dog ogsaa $x = x$, forsaavidt x er en Function af x.

[2]) At en Function som: $y = f(x, z, t, u \ldots)$ indeholder flere Uafhængige, lades i denne Sammenhæng, hvor det blot gjælder en Begrebsudvikling, ude af Betragtningen.

sætningen i dens Umiddelbarhed er et Givet, et Antaget, der opfattes i Forestillingen, og kun forsaavidt falder under Reflexionen, som det indsees, at den, for at være Forudsætning, maa have sine Consequenser. Man kan saaledes antage en Forudsætning, fastholde den i Forestillingen som noget Bekjendt, og dog i høi Grad overraskes af dens Consequenser. Overraskelsen hidrører derfra, at Forudsætningens Væsen ikke fra Begyndelsen af blev gjennemskuet; Forudsætningen blev vel tydeliggjort i en Forestilling, og forsaavidt opfattet fra en vis Side, men ikke alsidig opklaret, ikke opfattet efter sit Begreb. Først naar vi gjennemskue Forudsætningen, og opdage de deri skjulte Consequenser, erkjende vi Forudsætningens Væsen, sætte den som Grund, og Consequensen som den begrundede Følge. Hvilken Forskjel det gjør, om man kun har Grunden som en umiddelbar Forudsætning, eller man i Forudsætningens Væsen seer Grunden, kan med Hensyn paa $f(x) = ax = y$ oplyses ved et saare simpelt Exempel. A spørger B: Hvad vil Du have for Din Jagttaske? „3 Rdlr.!" er Svaret. „3 Rdlr.", vedbliver A, „vil jeg give Dig strax, og dersom Du vil bie i otte Dage, indtil en Pengeforstærkning, jeg venter fra Hjemmet, arriverer, vil jeg endog give Dig 3 x Rdlr." „Hvad mener Du med dette x?" „x er," svarer A, „en foranderlig Størrelse, en varierende Eenhed, der kan antage forskjellige Værdier, t. Ex. 1, 2, 3, 4 ...; de 3 x Rdlr. ville altsaa, som Du seer, paa denne Maade kunne blive til ... 3. 1 Rdlr., 3. 2 Rdlr., 3. 3 Rdlr. o. s. v." B tænker efter: „x er altid en Eenhed; de 3. 1 Rdlr. er jeg da vis nok paa; maaskee kan det Belovede, naar Pengeforstærkningen arriverer, og A er i Lune, stige til 3. 3, ja maaskee endog til 3. 4 Rdlr."; altsaa: B stoler paa den i den varierende Eenhed liggende Forudsætning, modtager Tilbudet, og venter. De otte Dage forløbe; Pengeforstærkningen udebliver, og A forklarer nu B Betydningen af den variable Størrelse: „x", siger han, „kan, som sagt, være:

1, 2, 3, 4 ..., men, da det er en varierende Eenhed, kan det jo ogsaa — det ligger i vor Forudsætning — være $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$... Vi kunne nu denne Gang vælge at sætte $x = \frac{1}{288}$; Du faaer altsaa, ifølge vor udtrykkelige Overeenskomst, d. e. ifølge vor Forudsætning, 3x Rdlr. $= \frac{1}{288}$ Rdlr. siger og og skriver en heel Skilling for Din Jagttaske." Nu gaaer der et Lys op for B, et Lys, der vel er sine 2 Rdlr. 95 ß værd; thi B gjør Bekjendtskab med den varierende Eenhed, han gjennemskuer Forudsætningen, og opdager Grunden. [1])

At indlade sig med Forudsætninger uden at kjende Grundforholdene er ofte ligesaa misligt, som at lege med ladte Pistoler; inden man vel seer sig for, kan en Forudsætning saa at sige gaae af, og udskyde en Consequens, der, om den end ikke dræber, saa dog saarer. Functionsbegrebet fordrer da ogsaa, at

γ) Forholdet imellem Functionens Afhængige og dens Uafhængige bestemmes som et Grundforhold.

Uagtet Consequensens Forhold til Forudsætningen altid er et Nødvendighedsforhold, bliver det dog først erkjendt som Grundforhold, naar Forudsætningen viser sig som Grund. Nødvendighedsforholdet udtrykker vel, at enhver Forudsætning maa have sin tilsvarende Consequens, og enhver Consequens sin tilsvarende Forudsætning; men, saalænge Forholdet forbliver i ubestemt Almindelighed, er det endnu uafgjort, hvad Udtrykket: „tilsvarende" egentlig vil sige. For at en tilsvarende Consequens skal fremgaae af den tilsvarende Forudsætning, maa Betingelsen træde til; først ved Betingelsen blive Forudsætningen og Consequensen nærmere bestemte.

---

[1]) Man vil forstaae, at hvad der i dette Exempel, seet fra et reent mathematisk Standpunkt, vilde være for subjectivt, faaer fra Philosophiens Synspunkt en Betydning derved, at den i Forudsætningen skjulte Illusion psychologisk afsløres.

Men Betingelsen, der, fra den ene Side seet, er forskjellig fra Forudsætningen, er, fra den anden Side seet, identisk med Forudsætningen. I sin Forskjel fra Betingelserne er Forudsætningen det Væsentlige, og efter sit Væsen Grund; men kun i sin Eenhed med Betingelserne er Grunden tilstrækkelig, og som tilstrækkelig Grund (ratio sufficiens) er den omfattende Forudsætning: ved Forudsætningens Identitet med Betingelsen bliver det formelle Nødvendighedsforhold et Grundforhold.

Saalænge Ligningen: $f(x) = y$ kun udsiger, at enhver Forandring i y er afhængig af en tilsvarende Forandring i x, er Afhængighedsforholdet endnu ubestemt og formelt, umiddelbart lydende paa Forudsætning og Consequens. Det er imidlertid saa langt fra, at det formelle Afhængigheds-forhold skulde i og for sig have nogen sand Almeengyldighed, at man end ikke er istand til at paavise dets Betydning uden at indføre Betingelser; [1]) men idet Betingelser indføres, bliver det almene Forhold forvandlet til et særskilt. „Man kan", hedder det i Mathematiken, „ikke sige, at 2 er en Function af 3, fordi $2 = 3^2 - 7$; thi 2 er ogsaa $= 3 - 1$, eller $= 3^3 - 25$ o. s. v., saa at 2 kan afhænge af 3 paa mangfoldige Maader. Men derimod kan man vel sige, at y er en Function af x formedelst Ligningen $y = x^2 - 7$, og at deri svarer $y = 2$ til $x = 3$" [2]). Altsaa: Betingelsen for, at y skal vise sig afhængig af x, er den, at der tillægges x forskjellige Værdier; Betingelsen for, at den anførte Afhængighed skal betegne en Function, er den, at Afhængigheds-maaden nærmere fastsættes. Men Betingelsen for den nærmere Bestemmelse af Afhængighedsmaaden er igjen, naar vi see nærmere til, denne, at den almene Function med indre

---

[1]) Allerede ved fra $\Phi(x, y) = 0$ at gaae til $y = f(x)$ have vi sat en Betingelse.

[2]) Chr. Jürgensen. Begyndelsesgrund. af den mathem. Anal. S. 19.

Nødvendighed maa sondre sig i særskilte Functioner: $f(x) = y$ faaer først Betydning ved at sættes som: $f_1(x) = ax$, $f_2(x) = x^a$, $f_3(x) = a^x$, o. s. v. Kun idet Reflexionen formaaer at udvikle den almene Function til særskilte Functioner, og de særskilte Functioner igjen til Identitet med den almene, kan Afhængighedsforholdet erkjendes som Grundforhold.

Stilles de særskilte Functioner: $f_1(x) = ax$, $f_2(x) = x^a$, $f_3(x) = a^x$ o. s. v., imod den almene Function: $f(x) = y$, da viser det sig strax, at den almene Function hverken umiddelbart kan holde sig udenfor, eller falde sammen med de særskilte. Fik den almene Function en egen Gyldighed ligeoverfor de særskilte Functioner, vilde den just derved blive særskilt, og altsaa ikke almindelig. Faldt den almene Function umiddelbart sammen med en af de særskilte, fik den jo derved de øvrige udenfor sig, og var heller ikke den almindelige; ja, selv om den antoges at falde saaledes sammen med hver enkelt særskilt, at ingen faldt udenfor dens Omraade, vilde den just udstykkes i Særskilthed, kunde ikke engang være en Function for sig, endsige en almindelig Function.

At den almene Function ikke lader sig fastholde i umiddelbar Væren, betyder ingenlunde, at det Almene skulde være uden sand Gyldighed, et tomt Schema, en subjectiv Abstraction; det beviser tvertimod, at det Almene har i sig selv en væsentlig og just derfor reflecteret Gyldighed: i sin reflecterede Gyldighed er den almene Function bestemt som Grunden til alle særskilte Functioner, som Grundfunctionen.

Den Maade, hvorpaa de særskilte Functioner, idet de hver efter sin Eiendommelighed gjengive Grundfunctionen, reflectere sig i hverandre indbyrdes, viser overalt, at Forudsætningerne med deres Betingelser paa een Gang ere Reflexionsmomenter i Grundens Væsen og dog Umiddelbarhedsbestemmelser i den satte Mangfoldighed, den begrundede

Tilværen. Til Forstaaelse af de mange særskilte Functioner vilde det altsaa, ifølge Grundforholdet, være tilstrækkeligt at forstaae en eneste, naar Forstaaelsen af denne ene var udtømmende; men til en udtømmende Forstaaelse af een Function vilde det, ligeledes ifølge Grundforholdet, være nødvendigt at forstaae dem alle.

b) Functionen og Loven.

Til Begrundelsen hører altsaa et Element, der gaaer sammen med Grunden, og dog falder udenfor Grunden; dette Element er Betingelsen. Betingelsen, som i Reflexionen er identisk med Grunden, forsaavidt det Særskilte begrundes, falder i sin Umiddelbarhed udenfor Grunden, og giver i denne Henseende en Afskygning af det Tilfældige. Er det Tilfældige paa denne Maade et i Grunden Nødvendigt, maa det Nødvendige jo med det Samme faae et Anstrøg af det Tilfældige, og vise sig som betinget Nødvendighed. Det i Tilfældene Tilfældige er det vexlende Enkelte, det Mangfoldige; det i Tilfældene Nødvendige er det væsentlig Ene, det Almene, Loven; mellem disse Yderled falder Mellembestemmelsen af det overfladisk Almene, det Fælleds, Reglen. Veien fra det mangfoldigt Givne gjennem Betingelserne til Grundeenheden er en Vei fra Tilfældet gjennem Reglen til Loven.

α) Tilfældet.

I Erfaringens Verden forefindes Tilfældet som Kjendsgjerning, og maa tages, som det gives; i den aprioriske Videnskab sætter den Vidende selv Tilfældet; men i begge Tilfælde ligner det Tilfældige sig selv deri, at, naar det engang er sat, saa er det sat, enten det saa har viist sig som Kjendsgjerning, eller som et a priori Antaget. Vel kunde det ved første Øiekast synes, som var det i Kjendsgjerning givne Tilfælde anderledes tilfældigt, end det Bevidstheden selv sætter. Som objectivt Tilfælde er Kjendsgjerningen

jo, fordi den er, og saaledes, som den er, uafhængig af Subjectiviteten; det subjectivt Satte derimod er, fordi Bevidstheden vil, at det skal være, og er just saaledes, fordi det er sat saaledes: det Vilkaarlige synes altsaa at fortære det Tilfældige. Dette er dog kun en Indbildning; at Vilkaarligheden ikke kan tilintetgjøre Tilfældigheden, er let at indsee. Vil Subjectiviteten, der sætter et Tilfælde, udelukkende sætte det i Kraft af Vilkaarlighed, hvad er den abstracte Vilkaarlighed da Andet, end bevidst Tilfældighed? Jeg sætter vilkaarlig et a, og er mig bevidst, at jeg ligesaa godt kunde have sat et b; jeg indseer, at det Vilkaarlige er i sig et Tilfældigt. Jo mere Subjectiviteten giver sig hen i vilkaarlige Phantasier og Forestillinger, desto mere giver den sig da ogsaa Tilfældigheden i Vold. Skal det vilkaarlig Satte faae intellectuel Betydning, maa det sættes som en Forudsætning, hvis Conseqvens anerkjendes: saamange særegne Forudsætninger, saamange Conseqvenser; Tilfældenes Eiendommelighed maa for Conseqvensens Skyld respecteres. At respectere Tilfældenes Eiendommelighed er at tillægge dem objectiv Betydning; men, idet Tilfældet faaer objectiv Betydning, viser sig jo netop det Tilfældige.

Ikke alene i den empiriske Yderverden, ogsaa i den aprioriske Forestillingskreds kan altsaa Tilfældenes Mængde vise sig overvældende, og det Uforudsete overraske os. I Mathematiken er Tallenes Antal utalligt, og Talforbindelsernes Mulighed uudtømmelig. Idet de enkelte Talstørrelser fastholdes, saaledes som de umiddelbart haves i Forestillingen, er hver Talstørrelse et Phænomen, og man fatter uvilkaarlig, at Talphænomenerne i vexlende Mangfoldighed ikke staae tilbage for Erfaringsphænomenerne. Tallet 9 være t. Ex. det givne Phænomen; man begynde nu at undersøge, paa hvilken Maade denne Størrelse fremkommer, og lader sig opløse ved andre Størrelser; og man vil snart overbevise sig om, at det ikke er dette eller hiint sær-

egne Tilfælde, men Millioner Gange Millioner mulige Tilfælde, man har med at gjøre.

Hvorledes skulle vi da behandle de utallige Tilfælde? Dette Spørgsmaal er i det Aprioriske væsentlig at besvare paa samme Maade som i det Empiriske. Hvad de empiriske Tilfælde angaaer, gjælder det, ved sammenlignende Abstraction at fremhæve det Fælleds, afskille det Uligeartede, og forbinde det Ligeartede; paa de aprioriske Tilfælde bliver, forsaavidt det Tilfældige fremhæves, en lignende Fremgangsmaade at anvende.

β) Reglen.

Naar det i mange Tilfælde Lige abstraheres og fastholdes, fremkommer Reglen. I de fire Regningsarter, saaledes som disse fremsættes og læres populært til praktisk Brug, sees en Mængde Regler. Man begynder med Forskrifter for Behandlingen af de særegne Opgaver; det vises i enkelte Exempler, hvad man har at gjøre, hvorledes man bærer sig ad med at opsætte Stykket og komme til Facit. Ved at anvende den foreskrevne Fremgangsmaade paa en Række Tilfælde, og see, hvorledes det hvergang slaaer til, at det rigtige Facit udkommer, overbeviser man sig om Reglens Gyldighed. Reglen, der er abstraheret af de enkelte Tilfælde, har i denne Sammenhæng kun Interesse, forsaavidt den lader sig anvende paa de enkelte Tilfælde: en Undersøgelse af Reglen i dens Almindelighed som Regel og af Reglernes indbyrdes Forhold forudsætter et høiere Synspunkt.

Saalænge Bevidstheden er fortabt i Tilfælde og Regler, er Tanken hildet i det Endelige; den videnskabelige Indsigt mangler. Kjendskab til Reglerne og Færdighed i at anvende dem, er endnu ikke Videnskab: Regnemesteren er endnu ikke Mathematiker. Den Fordom, Mange synes at nære mod Mathematiken, at den, uden væsentligt Forhold til Ideen og det Ideelle, kun skulde være en tør Gjenstand for „den tørre Forstand“, hidrører vel derfra, at de, der dømme saaledes, kun kjende det Mathematiske i dets ende-

lige, meest overfladiske Form som et Indbegreb af Regnestykker og Regler; thi deri have Poeter, Fruentimmer og Geniale unegtelig Ret, at Regnestykker og Regler ere til for „den tørre Forstand."

Ved at fremhæve Reglen søger Forstanden at naae det Almeengyldige, men Reglen som Regel er ikke almeengyldig; enhver Regel har, eller maa idetmindste kunne have sin Undtagelse: nulla regula sine exceptione. [1]) Vilde Nogen spørge, om man da ikke af Tilfælde, som dette: $2(3+4) = 2.3 + 2.4$ skulde kunne abstrahere den i sig almeengyldige Regel: $a(b+c) = ab + ac$? da maatte vi svare: Nei! Det blot Abstraherede er endnu ikke erkjendt som det Almeengyldige; det i sig Almeengyldige er ikke en Regel. Hvor misligt det er at ville ved Abstraction fra de enkelte Tilfælde sikkre sig det Almeengyldige, kan, hvad Mathematiken angaaer, blandt Andet sees i Læren om Primtallene. Man finder: $2^3 - 1 = 7$, $2^5 - 1 = 31$, $2^7 - 1 = 127$, lutter Primtal; men dersom man nu af disse tre Tilfælde uddrog den Slutning, at $2^{2m-1} - 1$ nødvendigviis maatte være et Primtal, vilde man forregne sig, da allerede det fjerde Tilfælde: $2^9 - 1 = 511 = 7.73$, ikke giver noget Primtal. Fermat antog, at $2^{(2^n)} + 1$ var et Primtal; men Euler viste, at $2^{(2^5)} + 1 = 2^{32} + 1$ er deleligt ved 641, og følgelig intet Primtal. At i slige Exempler Undtagelsen fra Reglen indtræffer snart med det fjerde, snart med det femte Tilfælde o. s. v., er i den hele Betragtning selv som et Tilfælde. Var Undtagelsen først indtraadt med det 99de Tilfælde, vi havde jo dog i den udvidede Regel endnu ikke fundet det i sig Almeengyldige, men derimod været udsatte for at bedrages af Tilfældenes Mængde.

---

[1]) Naar der altsaa efter friere Sprogbrug tales om almeengyldige Regler, maa man, forsaavidt det Almeengyldige fremhæves, tænke paa regulerende Love. I denne Forstand tages da Udtryk som: „Almindelige Differentiationsregler." Jürgensen. Begyndelsesgrunde af den mathem. Analyse. S. 43.

γ) Loven.

Det Almeengyldige, hvorfra der ikke er og ikke kan gives Undtagelse, er ikke Regel, men Lov. Skal Ligningen $a(b + c) = ab + ac$ opfattes som Lov, maa dens Gyldighed ikke beroe paa en Abstraction af de enkelte Tilfælde, men paa Indsigt i Sagens Væsen. Et eneste Tilfælde, der fører til Indsigt, har i saa Henseende større Værd, end tusinde Tilfælde, der kun afgive Stof for en sammenlignende Abstraction. At $\frac{1}{1-x}$ vil ved fortsat Division give en Række af utallige Led efter stigende Potenser af x, nemlig: $1 + x + x^2 + \ldots$ bevises ikke ved at fortsætte Divisionen i det Uendelige, men ved at tydeliggjøre, hvad Divisionen paa given Forudsætning nødvendigviis fører med sig. I sin Umiddelbarhed staaer Tilfældet for Reflexionen som det, hvorover der reflecteres; Resultatet af den endelige Reflexion, det Generelle, det relativt Almene, er den af Tilfældene abstraherede, paa Tilfældene anvendelige Regel; i Reflexionens Eenhed med Sagens Væsen erkjendes Loven. I Mathematiken, hvor intelligible Størrelser træde istedetfor sandselige Phænomener, kan Loven fremstilles i den rene exacte Form. Hvad er da Loven? Efter sit Begreb udtrykker Loven den Nødvendighed, hvormed Følgen indtræder, naar hele Forudsætningen d. e. Grunden med dens Betingelser er given. Er $a = b$ og $b = c$, saa er $a = c$; den Nødvendighed, Loven udtrykker, er altsaa hypothetisk: som den hypothetiske Nødvendigheds Udtryk er Loven det Almeengyldige. Enten vi sige: „det er en Lov, at Størrelserne a og c maae være indbyrdes lige, naar enhver af dem for sig er lig med Størrelsen b"; eller vi sige: „det er nødvendigt, at det maa være saaledes"; eller: „denne Sætning er almeengyldig", betyder Eet og det Samme.

Som det Almeengyldige finder Loven sit Udtryk i Axiomet, i Definitionen, i Theoremet. I enhver af disse

Udtryksmaader gjenkjende vi det hypothetisk Nødvendige, der betegnes ved Forholdet mellem Forudsætning og Conseqvens: dersom a = b, og b = c, saa er a = c; dersom alle Punkter i en plan Curve have den samme Afstand fra et bestemt Punkt i Planet, saa er Curven en Cirkel; dersom Figuren ABC er en Trekant, saa er Vinklernes Sum = 2 R. Om Udtryksformen selv forøvrigt er hypothetisk eller thetisk, gjør i denne Henseende ingen Forskjel; den væsentlige Forskjel beroer paa Begrundelsen.

Axiomet udtrykker Loven paa umiddelbar Maade. „Kun een Linie kan være den korteste Vei imellem to Punkter". Vilde man omskrive denne Grundsætning saaledes: „Det er en Lov, at der imellem to Punkter kun kan være een Linie, der er den korteste", da vilde en saadan Omskrivning ganske vist være overflødig og tvungen. Men at Omskrivningen udelades maa dog ikke misforstaaes, som om Loven og Grundsætningen faldt ud fra hinanden, saa at Grundsætningen var Et, og Loven et Andet; thi det Sande er, at Loven ikke særlig nævnes som Lov, just fordi den falder umiddelbart sammen med Grundsætningen: den Lovsætning, der i sig selv er saa indlysende, at den ikke trænger til Begrundelse, er Grundsætning.

Definitionen, der angiver de Forudsætninger, af hvilke Lovens Consequenser paa givne Betingelser fremgaae, er i Reflexionsforhold til Loven. Definitionen falder ikke, saaledes som Grundsætningen, umiddelbart sammen med Loven, tvertimod, den synes endog ved første Øiekast at forholde sig ligegyldig til Loven; men, naar Forholdet imellem Loven og Grundsætningen nærmere skal bestemmes, viser det sig, at Loven kun hviler i Grundsætningen, forsaavidt den hviler paa Definitionen. „Hvorfor kan kun een Linie være den korteste Vei imellem to Punkter?" Det ligger i Sagens Natur, fordi det ligger i Begrebet: „den korteste", men at det ligger i Begrebet, vil jo med andre Ord sige, at det oprindelig ligger i Definitionen. Dersom $a^x = y$,

saa gjælder Loven: x = log y, med a som Grundtal. Hvorpaa beroer saa Lovens Gyldighed? paa Logarithmens Definition.

I Theoremet bliver det ved Definitionen angivne Forhold paa særegen Maade formidlet, og Loven udtrykkelig sat som Lov. „En Læresætning eller et Theorem (theorema) fremstiller en Sandhed, som ikke er umiddelbart indlysende. Den indeholder en Forudsætning (hypothesis), bestaaende af en eller flere Betingelser, og en Følgesætning (thesis). Den Række af Slutninger, hvorved Følgesætningen føres tilbage til Forudsætningen, saa at den derved med Nødvendighed begrundes, danne Læresætningens Beviis (demonstratio).“ [1])

For at fatte Lovens Væsen og dens Forhold til Functionen er det nødvendigt at indsee, hvorledes Beviset og Definitionen, Læresætningen og Grundsætningen reflectere sig i hinanden. Haves t. Ex. Log som Logarithme svarende til Grundtallet A, og log svarende til Grundtallet a, da vil den Lov, hvorefter Transformationen fra det ene af disse Systemer til det andet foregaaer, vise sig baade at ligge i Logarithmens Begreb, og dog at trænge til et Beviis. Af Beviset: $A^x = y$, og $x = \text{Log } y$; $a^z = A$, $z = \log A$, $(a^z)^x = y$, og $xz = \log y$; altsaa: $\text{Log } y \log A = \log y$, og $\text{Log } y = \log y \dfrac{1}{\log A}$, sees, at Beviisførelsen er en Udvikling af Logarithmebegrebet, og at denne Begrebsudvikling er en Lovudvikling. Idet Beviisførelsen væsentlig falder sammen med Begrebsudviklingen, sees Grundsætningens og Læresætningens dialektiske Eenhed. Det er Videnskabens Opgave at forvandle enhver Grundsætning til Læresætning; det i sig Indlysende er kun indlysende for en Reflexion: det Umiddelbare maa formidles, det Ubegrundede maa begrundes. At den exacte Videnskab selv anerkjender denne Fordring, sees t. Ex. af dens Forsøg paa at føre Beviis for den Sætning, at

[1]) C. Ramus. Elementær Geometrie 1850. S. 7—8.

„den korteste Linie imellem to Punkter er en ret" [1]). At omvendt Læresætningen maa hæves til Identitet med Grundsætningen, vil med andre Ord sige, at det i Erkjendelsen Middelbare maa hæves til høiere Umiddelbarhed. Beviset har just den Betydning, at det ved at gjøre Sagens enkelte Punkter umiddelbart indlysende viser os det Hele i et Lys af reflecteret Umiddelbarhed.

At Functionen og Loven falde sammen i en Begrebsudvikling, er da i Qvantitetslæren uimodsigeligt; for at bestemme, hvad en Function er, maae vi forudsætte Loven, for at bestemme Loven, maae vi igjen forudsætte Functionen: saamange Functioner, saamange Love. Ligesom Loven ved at have Tilfældene i sin Magt er hævet over den blotte Regel, saaledes er ogsaa Functionen hævet over den blotte Regel; ligesom Loven ikke kan undvære Tilfældet, fordi den i sin hypothetiske Nødvendighed ikke kan undvære den umiddelbare Forudsætning, saaledes kan Functionen i sin betingede Almeengyldighed heller ikke undvære Forudsætningens og Betingelsens Umiddelbarhed; [2]) ligesom den ene Grund-

---

[1]) See t. Ex. L. Oppermann. Elementær Plangeom. Kbh. 1845. S. 43.

[2]) „Indem die Function über den Begriff des realen continuirlichen Seins im Raume hinausgeht und die einfache Unmittelbarkeit von dessen Begrenzung negirt, so geht sie doch wieder vollständig mit ihm zusammen, weil sie die allgemeine Regel ist, vermöge deren auf die gesammte Folge von Punkten dieser Curve (her henvises til den Maade, hvorpaa en plan Curve bestemmes, idet ethvert Punkt (x, y) i den kan bestemmes, formedelst Ligningen $y = f(x)$) zurückgekommen werden kann, weil sie in der unveränderlichen Folge ihrer Rechnungsoperationen das allgemeine Gesetz, das Bleibende darstellt, wodurch die aus ihrem Flusse herausgerissenen isolirten vielen Punkte wieder zu einer Einheit zusammengeschlossen werden, und weil sie mithin dieselbe befassende Einheit ist, als welche die ebene Curve in der Anschauung vorliegt." Versuch einer Philosophie der Mathematik verbunden mit einer Kritik der Aufstellungen Hegel's über den Zweck und die Natur der höheren Analysis von Hermann Schwarz. Halle 1853, S. 26.

function formedelst Tilfældenes Forskjellighed og dog med indre Nødvendighed bliver adskilt i et System af særskilte Functioner, saaledes bliver den ene Grundlov paa samme Vilkaar sondret i et System af særskilte Love.

c) Functionsbegrebets eiendommelige Fremstilling.

Til at angive Functionsbegrebets Reqvisiter er den mathematiske Betegnelsesmaade allerede anvendt; men det i Betegnelsesmaaden Eiendommelige kan først blive Gjenstand for særegen Reflexion, naar Opmærksomheden fæster sig paa Betydningen af Mathematikens pasigraphiske Sprog,

---

Hvorledes Functionen og Loven falde sammen i Grundbegrebet, sees af utallige Exempler. At $F(x, y, z) = 0$ er Ligningen for en Overflade, vil jo med andre Ord sige, at denne Function udtrykker Loven for de til et givet System svarende Coordinatforandringer, hvorved Punkterne i den paagjældende Overflade bestemmes. Punkternes Antal er uendeligt, et uendeligt Antal Punkter kan ikke bestemmes enkeltviis; i Valget af de Punkter, man enkeltviis vil bestemme, er der da saaledes noget Vilkaarligt og Tilfældigt, men ifølge Functionen bliver Bestemmelsen af de utallige Punkter netop reflecteret i den Maade, hvorpaa det enkelte Punkt bestemmes: saaledes indgaaer overalt det Endelige under det Uendelige, det Foranderlige under det Bestandige, Phænomenerne under Loven, det Tilfældige under det Nødvendige, Tingen under Begrebet, det Særskilte under det Almene.

Hvormange særlige Væsensbestemmelser en Grundfunction og dermed en Grundlov i Begrebet kan indeholde, uden at der endnu er Tale om den Særskilthed, der individualiserer sig for en umiddelbar Anskuelse, er ligeledes indlysende af det anførte Exempel. Den almene Form $F(x, y, z) = 0$ angiver ikke blot Fladens Væsen som Flade, men af denne Form kan endog en Fleerhed af Egenskaber, nemlig Fladens Grundegenskaber: dens Krumning i et vist Punkt, dens Beliggenhed mod andre Flader i et vist Punkt, Ligningen for dens Tangentplan til et hvilketsomhelst Punkt o. s. v. udledes. Først idet Fladens almindelige Ligning articuleres til Ligningen for særskilte Flader, fremtræder Grundlovens Indhold i et System af særskilte Love.

paa den til Sproget svarende Tænkning, og den af begges Forening resulterende Indsigt, den punktuelle Begriben.

α) Sproget.

Et System af Tegn, hvorved dels Følelser, dels Forestillinger og Tanker udtrykkes, er et Sprog. Blandt de mange Slags Sprogforskjelligheder er Forskjellen imellem det almeenlogiske Talesprog og det pasigraphiske Tegnsprog uden Tvivl den meest gjennemgaaende. „Til en philosophisk Fremstilling af Begrebet bruges Ordet, og Ordet lyder forskjelligt i de forskjellige Folkesprog; men Mathematiken nøies ikke med Ordet; uafhængig af Folkesprogenes Forskjellighed har den exacte Videnskab sit eget Sprog: $f(x+y) = f(x).f(y)$ er hverken dansk eller fransk, men mathematisk.“ [1])

Det mathematiske Sprog, paa hvis Uddannelse Mænd som Vieta, Cartesius og Leibnitz have arbeidet med saameget Held, er for Forstanden, hvad Nodesproget er for Følelsen; kun at det som et Forstandens Sprog er i et væsentligere Forhold til Logiken.

Mathematikens pasigraphiske Sprog er i en vis Henseende overvurderet af Leibnitz, men undervurderet af Hegel.

Leibnitz [2]), der med en saa uhyre Lærdom, at „han for sig alene forestillede et Akademie“, greb ind i alle sin Tidsalders videnskabelige Anliggender, var Stifter af Akademierne i Berlin, Dresden, Wien og Petersborg, fattede endog i Rom den dristige Plan at indføre naturvidenskabelige Studier i de italienske Klostre, og lagde overalt an paa at oprette videnskabelige Stater, Lærdomsrepubliker efter en overordentlig Maalestok. For et Videnskabernes Universalmonarkie var imidlertid Folkesprogenes Forskjellighed en følelig Hindring; den Tanke laae da nær, om det dog ikke var muligt ved Indførelse af en direct Betegnelsesmaade,

---

[1]) Jvfr. Phil. og Mathem. S. 9—15.

[2]) Jvfr. Kuno Fischer. Geschichte der neuern Philosophie, zweiter Band. Mannheim 1855. S. 10—16.

en umiddelbar Signatura rerum, at hæve sig over denne sproglige Particularisme. Opfattet i Almindelighed og betragtet i Frastand maatte en saadan Idee have noget særdeles Tiltalende for en Genius som Leibnitz. Det var jo netop slige Tankehieroglypher, de Gamle, navnlig Pythagoræerne, søgte i de symbolsk-mystiske Tal, og hvorom Kabbalisterne havde drømt saameget; saadanne Begrebscharakterer, et saadant signativt Sprog, havde jo netop de exacteste Videnskaber, navnlig Mathematiken i dens arithmetiske og algebraiske Tegn; hvorfor skulde det nu ikke være muligt at udvide og udtrykke den Verdensviisdom, der udgjør samtlige Videnskabers Indhold, i en Verdensskrift, et pasigraphisk Sprog? „Der Mathematiker Leibnitz hat, scheint es, den Philosophen Leibnitz zu dem Probleme der Pasigraphie überredet, und der nach Universalität strebende Geist des letzteren begünstigte gern ein Projekt, welches der Weltaufklärung so viele Schwierigkeiten ersparen und die Idee auf dem kurzesten Wege befördern wollte.“ Kuno Fischer.

Til den modsatte Yderlighed er Hegel gaaet i sin Logik. I Læren om „Begrebet“ dadler han Euler og Lambert, der have søgt at henføre Begrebsbestemmelser til Betegnelser ved Linier, Figurer o. desl. „Slige Gjenstande“, siger han, „have det Eiendommelige ved sig, at de ere udvortes for hinanden, fixe Bestemmelser. Tages Begreberne saaledes, høre de op at være Begreber.“ ... „Ihre Bestimmungen sind nicht so ein Todtliegendes, wie Zahlen und Linien, deren ihre Beziehung nicht selbst angehört; sie sind lebendige Bewegungen“.

Her er Misforstaaelse paa Misforstaaelse. Medens Leibnitz vil have den hele Cyclus af videnskabelige Erkjendelser udtrykt ved en med den mathematiske analog Betegnelsesmaade, gaaer Hegel i sin Indsigelse herimod saavidt, at han endog anseer det mathematiske Tegnsprog som saa lidet svarende til Logikens Fordring, at kun Talesproget alene kan være Begrebernes Sprog. „Da der Mensch die

Sprache hat, als das der Vernunft eigenthümliche Bezeichnungsmittel, so ist es ein müssiger Einfall, sich nach einer unvollkommnern Darstellungsweise umsehen und damit qvälen zu wollen. Der Begriff kann als solcher wesentlich nur mit dem Geiste aufgefaßt werden dessen Eigenthum nicht nur, sondern dessen reines Selbst er ist. Es ist vergeblich, ihn durch Raumfiguren und algebraische Zeichen zum Behufe des äußerlichen Auges und einer begrifflosen mechanischen Behandlungsweise, eines Calculs, festhalten zu wollen." [1])

Det Eensidige i denne Synsmaade er iøinefaldende. Vistnok er Talesproget et for Begrebsudviklingen uundværligt Medium; men da „Begrebet som saadant væsentlig kun kan opfattes med Aanden", saa følger jo aabenbart heraf, at det ikke er Midlet som Middel, men Midlets aandige Brug, hvorpaa det kommer an. Det er da heller ikke Rumsfigurer og algebraiske Tegn alene, der kunne opfattes paa aandløs Maade; det Samme kan skee med Sprogets Ord og Sætninger. Den, der i Sætningen kun seer en Sum af Ord, i Ordet en Sum af Stavelser, i Stavelsen en Sum af Bogstaver, seer jo heller ikke Begrebet. Da det nu altsaa ikke er Midlet i og for sig, men den rette Brug af Midlet, hvorom det gjælder, saa opstaaer det i denne Sag afgjørende Spørgsmaal, om der til en alsidig og fuldstændig Begrebsudvikling ikke foruden de Midler, Talesproget tilbyder, skulde behøves endnu andre Midler. For at besvare dette Spørgsmaal maae vi see paa:

β) Tanken.

Naar Hegel viser det Ufrugtbare i at ville, som Leibnitz, gjøre de syllogistiske Figurer til Gjenstand for en combinatorisk Calcul, og dadler en Ploucquet, der ved mathematiske Bestemmelser af det Logiske mener at have bragt det saavidt: posse etiam rudes mechanice totam logicam

---

[1]) Wissenschaft der Logik, zweiter Theil, Berlin 1834. Side 59.

doceri, ut pueri mathematicam docentur, da er han i sin Ret: at forvandle Logiken til Forstandsmechanik er aandløst. Ligeledes er, hvad Hegel under „Der Schluß des Daseyns" angaaende „den fjerde Figur: A — A — A eller den mathematiske Slutning" bemærker, at navnlig Mellemleddet, terminus medius, som her skulde være det Formidlende, ikke har nogen egen Bestemthed ligeoverfor Yderleddene, og at det just er dette Tautologiske, som gjør, at Slutningen falder sammen med et mathematisk Axiom, — vistnok aldeles berettiget. Men med alt dette har Hegel i sin Bedømmelse af den mathematiske Udtrykmaade overseet en Side, som, hvad Tanken og Begrebet angaaer, er den egentlige Hovedside, nemlig det Punktuelle.

Til en alsidig Udvikling af Qvantitetens Kategorier hører, at det Punktuelle maa gaae i Eet med det Almene: her spørges ikke blot om et Stort og et Større, her spørges tillige: hvor stort? hvormeget større? Talesproget, der ikke ved Ordet kan paapege det Enkelte i dets umiddelbare Tilværen, kan heller ikke ved Ordet tydeliggjøre den punktuelle Bestemthed; Talesproget har altsaa, naar Tanken fordrer det Punktuelle, en Mangel, der maa erstattes ved det mathematiske Tegnsprog. Saadanne Fundamentalligninger som: $f(x+y)=f(x)+f(y)$, og $f(x+y)=f(x).f(y)$ ere tillige Sætninger, der udtale et Begreb, altsaa logiske Domme. Hvad der skal forstaaes ved $f(x+y)$, bliver i disse Ligninger væsentlig bestemt paa samme Maade, som naar det i Dommen bestemmes ved Prædicatet, hvad der skal forstaaes ved Subjectet. Idet Ligningen udtrykker en Lov, er den en Dom, der udsiger det Almene, og Tegnsproget kan i saa Henseende siges at congruere med Talesproget; men, forsaavidt Ligningen er en Formel, har den i sig, hvad Talesproget ikke har, en Mulighed til exacte Bestemmelser i det Uendelige. Hvad Hastighed er, kan man vel paa en Maade udtrykke i Ord, men Hastighedsbegrebet fordrer, naar det med sine exacte Bestemmelser skal tydelig-

gjøres, den exacte Analyse. Det gjør en Sphæreforandring i Erkjendelsen, naar man, efter at have forklaret, hvad Hastighed er, i Ord, anvender den mathematiske Betegnelse, kalder Rummet s, Tiden t, Hastigheden v, og sætter $v = \frac{s}{t}$ som Definition paa Hastigheden; ja, for at Definitionen skal passe ikke blot paa den jævne, men ogsaa paa den ujævne Bevægelse, gaaer videre, sætter istedetfor Rummet s Rumselementet ds, istedetfor Tiden t Tidselementet dt, og saaledes definerer Hastigheden ved $v = \frac{ds}{dt}$. Den, der kun har Hastighedsbegrebet, forsaavidt det kan fremstilles og tydeliggjøres i Ord, har det kun i svævende Almindelighed, og altsaa paa en overfladisk Maade. Kategorien „Hastighed" hører til en Kreds af Begreber, der have det Særegne ved sig, at de ikke lade sig tydeliggjøre ved almindelig Reflexion, men til deres væsentlige og punktuelle Udvikling fordre den intellectuelle Handling, den mathematiske Operation: alle Functionsbegreber ere Operationsbegreber.

γ) Sproget og Tanken.

Udvikler man, hvad Hegel i sin Retning har gjort, Qvantitetens og Maalets Kategorier i logisk-dialektisk Form saaledes, at Operationsmomenterne kun flygtig berøres, maa Begrebsudviklingen blive eensidig og i flere Punkter, endog hvad det Almindelige angaaer, uholdbar. Begreber, der have deres videnskabelige Rødder i de exacte Analysers Jordbund, forqvakles, naar de exacte Momenter maae savnes i deres Dialektik. At en dialektisk Udvikling af Qvantitetsbegreberne ikke erstatter Manglen paa Indsigt i Operationens Grundforhold, sees deraf, at, medens der vel gives en Overgang fra den exacte Analyse til den dialektiske, gives der ikke omvendt en Overgang fra den almeenlogiske og dialektiske Analyse til den exacte: »Non datur metaphysica in mathesin via«. [1])

---

[1]) C. Ramus: „Differential- og Integralregning". Fortale.

Opstiller man, for at slippe for videre Uleilighed med Operationsmomenterne, den Paastand, at de til Qvantiteten svarende Functionsbegreber skulle opfattes fra to saa forskjellige Hovedsider, at den ene udelukkende vedkommer Mathematiken, den anden Philosophien: hvad følger saa heraf? Enten maa man da forudsætte, at den Side, der hører under Mathematiken, er som Begrebsside uvæsentlig, og altsaa miskjende den exacte Videnskab; eller ogsaa indrømme, at de omhandlede Begreber vel i Mathematiken have en for Begribningen væsentlig, men dog for Philosophien utilgjængelig Side. Men indrømmer man, at her i Videnskaben skulde gives en for Philosophien utilgjængelig Begrebsside, et cognoscendi genus, hvis Væsen Philosophien ikke formaaer at gjennemskue: da har man jo med det Samme indrømmet, at Philosophien, om den end kan raisonnere en Deel over Tænkning i Almindelighed og Granskning i Særdeleshed, dog alligevel, naar det kommer til Stykket, hverken kan afgive nogen almindelig d. v. s. gjennemgaaende Erkjendelseslære eller omfattende Videnskabslære.

Den Maade, hvorpaa det Punktuelle i Functionsbegrebet gaaer sammen til Eenhed med det Almene, viser, at Fremstillingen ikke kan undvære den exacte Formel. Naar Platos Timæus vil forklare, hvorledes det gik til, at Guden, der dannede Verden, „udfyldte de dobbelte og tredobbelte Mellemrum, idet han afskar Dele af det Hele, og satte dem imellem disse, saa at der i ethvert Mellemrum vare to Midter, af hvilke den ene overgik det første Yderled, og blev overgaaet af det andet ved den samme Brøk af enhver af dem" o. s. v.; samt, hvorledes han (Guden) lod „det Sammes Kreds bevæge sig efter Siden af et Parallelogram fra Venstre til Høire, men det Andets fra Høire til Venstre efter Diogonalen": da føler man det Besværlige, for ikke at sige Uoverkommelige, i at skulle uden Hjælp af Tegnsproget, beskrive med Ord, hvad Ord ikke kunne beskrive.

Indsees nu paa den anden Side Nødvendigheden af at benytte Tegnsproget, og pointere ved Formler, da indsees tillige, at Fremstillingen bør holdes saaledes, at den hverken hildes i mathematiske Operationer, eller anbringer Formlerne som løse, uforstaaelige Aphorismer. Hvad hermed menes, maa et Exempel oplyse. I sin Logik, i det Afsnit af Ideelæren, der omhandler Erkjendelsen [1]), vil Hegel godtgjøre, at det kun er i den høiere Analysis, at Læresætningerne blive synthetiske, og siger saaledes: „So ist die Auflösung der Gleichung $X^m - 1 = 0$ mit Hülfe der Sinus .... eine synthetische Auflösung, weil die zu Hülfe genommenen Bestimmungen, die Sinus .... nicht eine Bestimmung der Aufgabe selbst ist."

Men hvad vil det nu sige, at Sinus maa tages med, naar man skal opløse Ligningen: $X^m - 1 = 0$? En udførlig Anvendelse af Eulers og Moivres Formler, en fuldstændig Deduction af Ligningen: $X^m - 1 = (X - 1)(X - \cos\frac{2\pi}{m} - \sin\frac{2\pi}{m}\sqrt{-1})(X - \cos\frac{4\pi}{m} - \sin\frac{4\pi}{m}\sqrt{-1})\ldots$, vilde her forvandle Tankegangen fra en philosophisk til en mathematisk, medens fuldstændig Mangel paa Oplysning vilde, hvad man vistnok i dette Tilfælde kan indvende mod den hegelske Fremstilling, hindre den Læser, der ikke særlig beskæftiger sig med det Mathematiske, fra at fatte Pointen. I hvilket Omfang den mathematiske Oplysning maa meddeles, maa da væsentlig afhænge af det Eftertryk, der i en given Sammenhæng [2]) lægges paa Udviklingen: som Tanken er, maa ogsaa Sproget være.

---

[1]) Wissenschaft der Logik, zweiter Theil, Berlin 1834. S. 286.

[2]) Vilde Hegel ved det anførte Exempel virkelig oplyse Læseren om, hvad det vil sige, at en mathematisk Læresætning bliver synthetisk; da havde det været ham let at simplificere Fremstillingen. Sættes i Ligningen: $X^m - 1 = 0$, $m = 2$, faaes $X^2 - 1 = 0$, d. e. $X = \pm\sqrt{1} = \pm 1$; men $\cos 0 + \sin 0 \sqrt{-1} = +1$, og $\cos\frac{2\pi}{2} +$

II.

Uendelighedsproblemet.

I Functionen er Eenheden af den constante og den variable Størrelse sat saaledes, at Muligheden til en Udvikling af Forholdet mellem det Endelige og det Uendelige derved er given. Idet Størrelsen sættes constant, sættes den med værende Grændse, og opfattes som endelig; idet Størrelsen sættes variabel, sættes den med vordende Grændse, og antyder en Overgang til det Uendelige. De Forandringer, hvis Mulighed Functionen angiver, ere utallige, og vise os Uendelighedens phænomenale Side; den Lov, Forandringerne ifølge Functionen ere underkastede, er det i sig Uforanderlige, og fremstiller det Uendelige fra den væsentlige Side. „Uendelighedsproblemet er Mathematikens og Philo-

---

$\sin\frac{2\pi}{2}\sqrt{-1} = -1$; sættes endvidere $m = 3$, faaes $X = \sqrt[3]{1} = 1^{\frac{1}{3}} = +1$, $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$; men $\cos 0 + \sin 0\sqrt{-1} = +1$, $\cos\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3}\sqrt{-1} = \frac{-1+\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}$, og $\cos\frac{4\pi}{3} + \sin\frac{4\pi}{3}\sqrt{-1} = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$. Læseren behøver altsaa kun alminbelige Forkundskaber, for at indsee, hvorledes det gaaer til, at Sinus og Cosinus indføres i Løsningen af anførte Ligninger.

Havde den philosophiske Opgave derimod været, ved Udtrykket: $X^m - 1 = 0$ exempelviis at oplyse, at Rødderne i en algebraisk Ligning kunne henføres til Formen $a \pm b\sqrt{-1}$, som ogsaa for $b = 0$ indbefatter de reelle Rødder, og derved oplare, hvad det vil sige, at de imaginære Rødder forekomme parviis, saaledes at hvert Par kan betragtes som Rødder i en algebraisk Ligning af 2den Grad ($(x - a)^2 + b^2 = 0$), og Ligningen altsaa vise sig som sammensat af lutter reelle Factorer af i det høieste 2den Grad: da havde det valgte Udtryk været at belyse fra en anden Side.

sophiens store Fællesdsproblem. Men før man ret kan tænke paa Løsningen af et Problem, maa man allerførst see at lade Problemet blive til. Nærværende Problem er nu af den Beskaffenhed, at det kun da kan staae klart for Bevidstheden, naar Mathematiken vil hjælpe Philosophien med at stille det frem". [1])

For at Uendelighedsproblemet kan blive tydeligt, og Betingelserne for dets Løsning indsees, vil det fornemmelig komme an paa at opklare følgende Punkter: det Endeliges Forskjel fra det Uendelige, Tilnærmelsen af det Endelige til det Uendelige, og den Maade, hvorpaa denne Tilnærmelse lader sig articulere.

a) Det Endelige i dets umiddelbare Forskjel fra det Uendelige.

For den umiddelbare Betragtning viser det Endelige sig som det Værende, det Positive, det Uendelige som det Ikke-Værende, det Negative; her er forsaavidt en qvalitativ Grændse imellem det Endelige og det Uendelige. Ved at fastholde den blot qvalitative Grændse vilde det imidlertid være umuligt at udvikle det Uendeliges Begreb; berøvet ethvert Endelighedens Gjenskin, falder det Uendelige sammen med den tomme Negation: Problemet kan ikke blive til. Opfattes det Endelige derimod ikke blot som et Værende, men som en værende Størrelse, som den Størrelse, hvis Grændser kunne overskrides, da bliver det Uendelige ikke længere en absolut Negation af Størrelsen, men en Negation af det i Størrelsen Endelige, en Negation af den endelige Størrelse, en Størrelsesnegation, der væsentlig hører med til Begrebet: Størrelse. Idet den qvalitative Grændse da saaledes viser sig som qvantiterende, fremkommer Problemet.

Opfattes nemlig det Uendelige, ikke som absolut Størrelsesnegation, men som Negation af den endelige Størrelse,

---

[1]) Phil. og Mathem. S. 20.

maa dette Uendelige for den umiddelbare Anskuen vise sig fra aldeles modsatte Sider. Som det, der i Storhed og Lidenhed overgaaer det Endelige, falder det udenfor Endeligheden, som det, hvori enhver endelig Størrelse lader sig opløse, falder det indenfor, ja sammen med Endeligheden. Ved at gjennemskue de modsatte Synsmaader opdager Reflexionen det Endeliges dialektiske Eenhed med det Uendelige.

α) Det Uendelige udenfor det Endelige.

Hvorledes det Uendelige, derved at det i Storhed og Lidenhed overgaaer enhver endelig Størrelse, kommer til at falde udenfor Endeligheden, og holde sig som et Hiinsidigt, anskueliggjøres ved Rækker, hvis Led ere Functioner af den Plads, de hver i sin bestemte Række indtage. Ligningerne for den arithmetiske, den harmoniske og geometriske Række: $u_n = \underset{1}{f}(n) = a + nx$, $u_n = \underset{2}{f}(n) = \frac{1}{a + nx}$, $u_n = \underset{3}{f}(n) = ax^n$, vise, at der imellem det størst mulige endelige Led og det uendelig Store, ligesom ogsaa imellem det mindst mulige endelige Led og det uendelig Lille, er en uendelig Afstand. Idet Grændsen mellem det Endelige og det Uendelige er paa een Gang baade qvalitativ og qvantitativ, danner her sig en Overgang, som dog, saalænge de to Bestemmelser holdes umiddelbart imod hinanden, ingen Overgang er.

I Ligningen $u_n = f(n) = ax^n$ gjør det vel i een Henseende en Forskjel, om man imellem ax^0 og ax^∞ udelukker ethvert endeligt Led, eller anbringer Millioner Gange Millioner Mellemled; men denne Forskjel er ikke destomindre aldeles forsvindende. Forsaavidt Grændsen imellem det Endelige og det Uendelige er qvantitativ, synes det vistnok ved første Øiekast, som om de mange Mellemled udfyldte Kløften, og bragte det Endelige nærmere sammen med det Uendelige; men, naar saa det i Grændsen Qvalitative: „enten et Endeligt eller et Uendeligt", betones, tabe de Millioner Led, der skulde udfylde Kløften, deres Betydning som Overgangsled. Istedetfor at danne en Overgang fra

det Endelige til det Uendelige, betegne de mange Led kun en Fortsættelse af det Endelige; naar da det Uendelige som $ax\infty$, $ax-\infty$ sættes, sættes det udtrykkelig ved en Afbrydelse, en Negation, et Spring. Den qvalitative Grændse, der adskiller det ene Endelige fra det andet, Hvidt fra Sort, Dag fra Nat, Land fra Hav o. s. v. kan, saalænge her i qvantitativ Henseende kun reflecteres paa et Endeligt, være snart nærmere snart fjernere: Den, der kun er en Miil fra Kysten, er naturligviis Grændsen nærmere, end Den, der er mange Mile ude paa Havet; men, naar Grændsen er imellem Endeligt og Uendeligt, altsaa uendelig qvantiterende, er den som qvalitativ Grændse overalt lige nær og lige fjern: den Negation, hvormed det Endelige afbrydes, og det Uendelige sættes, er for hvert endeligt Led lige ubetinget, lige negativ. At her er en Overgang, som ingen Overgang er, viser, at den angivne Synsmaade er urolig, utilfredsstillende. Det Utilfredsstillende sees blandt Andet deraf, at man, istedetfor at lade det Uendelige falde udenfor det Endelige, med ligesaa megen Ret kan vælge den modsatte Synsmaade, og søge:

β) Det Uendelige indenfor det Endelige.

Hvorledes Overgangen fra Endeligt til Uendeligt d. e. fra Endeligt til O, og fra Endeligt til ∞ falder sammen med en tilsvarende Overgang fra Endeligt til Endeligt, kunne de trigonometriske Functioner anskueliggjøre. Er t. Ex. $x = 90^0$, saa er $\cos x = 0$, $\sin x = 1$, $\operatorname{tg} x = \infty$ o. s. v. Gjøres nu, hvad $\angle x$ angaaer, en Overgang fra 89^0 til 90^0, saa gjør $\sin x$ en Overgang fra Endeligt til Endeligt, $\cos x$ fra Endeligt til O, og $\operatorname{tg} x$ fra Endeligt til ∞. Ja Overgangen fra Endeligt til Endeligt er selv en Overgang i et Uendeligt. Imellem $\angle x = 89^0$ og $\angle x = 90^0$ ligge jo uendelig mange uendelig smaae Vinkler, der alle maae gjennemløbes, naar Overgangen skal skee: den endelige Vinkel er, som i det Hele enhver endelig Størrelse, deelbar i det Uendelige. Ifølge den uendelige Deelbarhed bliver det

Uendelige omsluttet af endelige Grændser; idet Delene blive uendelig smaae, bliver deres Antal uendelig stort: de endelige Grændser omslutte det uendelig Store, just fordi de omslutte det uendelig Lille. Hvad er altsaa det Endelige? Et Produkt af Uendeligheden, en Synthese af det uendelig Lille med det uendelig Store. Og det Uendelige? Et Endelighedens Product, en gjennemført Udfoldning og derved en gjennemført Opløsning af det Endelige. Hvorledes det Endelige, idet det viser sig at være uden Ende, kan frembringe det Uendelige, sees t. Ex. af en Qvotientrække, som $\frac{1}{1-1} = 1 + 1 + 1 + \ldots.$, thi selv naar Rækken tænkes fortsat i det Uendelige, have vi dog $\frac{1}{1-1}$ til Rest og maae begynde forfra. Det Uendelige fremkommer ved endelige Leds uophørlige Gjentagelse: idet det Endelige formedelst Deelbarheden bliver opløst i det Uendelige, bliver det Uendelige med det Samme sat formedelst det Endelige. Heraf følger:

γ) Det Endeliges og det Uendeliges dialektiske Eenhed.

„Den formelle Logik holder fast paa den Grundsætning, at det Endelige ikke er uendeligt, og det Uendelige ikke endeligt. Men saa uimodsigelige disse af Contradictionsprincipet garanterede negative Domme end synes at være, saa fattige, indholdsløse ere de tilsvarende positive: „det Endelige er det Endelige, det Uendelige det Uendelige“, thi deres saakaldte Identitet er en reen Tautologie. Som dialektisk Videnskab har Philosophien ikke kunnet blive staaende ved slige Tautologier. At det Uendelige ikke er endeligt, vil jo med andre Ord sige, at det er en Grændse for det Endelige, altsaa det Ikke-Endelige. Det Endelige, der er det Ikke-Uendelige, er da med det Samme en Grændse for det Uendelige. Men, naar det Endelige og det Uendelige paa denne Maade ere hinandens Grændser, maa

Grændsebestemmelsen blive dialektisk. Har nemlig det Uendelige sin Grændse i det Endelige, saa har det jo en Endelighedsgrændse, en endelig Grændse, og er selv endeligt. Naaer det Endelige omvendt først sin Grændse i det Uendelige, da har det jo ingen endelig Grændse, og er følgelig uendeligt." [1])

Forsaavidt det Uendelige omgiver det Endelige, er Grændsen bestemt ved det Uendelige; forsaavidt det Endelige omgiver det Uendelige, er Grændsen bestemt ved det Endelige; at denne dobbeltsidige Bestemmelse nødvendig hører med i den gjennemreflecterede Grændse, er let at paavise. En Vinkel paa 90° kan deles i uendelig mange uendelig smaae Vinkler, en Vinkel paa 1° ligeledes; en Qvadratmiil kan deles i uendelig mange uendelig smaae Qvadrater, en Qvadrattomme ligeledes: hvad følger heraf? Lægges Eftertrykket paa det Endeliges Opløsning i det Uendelige, da synes vistnok Følgen at være, at her ikke længere er Forskjel imellem Vinklen paa 90° og Vinklen paa 1°, at Delen bliver lig det Hele, at Grændsen, med andre Ord, er udslettet. Men lægges saa Eftertrykket igjen paa det Uendeliges Tilværen i og ved det Endelige, da bliver der ikke blot Forskjel imellem Endeligt og Endeligt, imellem Delen og det Hele, men her viser sig med det Samme en bestemt Forskjel imellem Uendeligt og Uendeligt saavel med Hensyn til det uendelig Lille som til det uendelig Store. Det ene uendelige Antal uendelig smaae Vinkler kan da være ligesaa forskjelligt fra det andet, som 1° fra 90°; det ene uendelige Antal uendelig smaae Qvadrater ligesaa forskjelligt fra det andet, som en Qvadrattomme fra en Qvadratmiil. At Grændsen i det Endelige ophæves, betyder, at den sættes i det Uendelige, at det Uendelige i sig optager Grændsen, betyder, at det Endelige sættes. Den dialektiske Eenhed viser sig deri, at Grændsen ligesaa meget tilhører det Uendelige som det Endelige.

---

[1]) Philos. og Mathem. S. 21–22.

b) **Det Endeliges Overgang i det Uendelige: Tilnærmelsen.**

Dersom Grændsen imellem det Endelige og det Uendelige blot var qvalitativ, kunde her ikke gives nogen Overgang, men kun en Afbrydelse; var Grændsen blot qvantitativ, vilde den ved Negationen satte Afbrydelse forflygtiges, og Overgangen tabe sin Betydning. Kategorien: Overgang forudsætter en dialektisk Enhed af det Qvalitative og det Qvantitative, der finder sin Udvikling i Tilnærmelsen. A være t. Ex. adskilt fra B ved en qvalitativ Grændse; A er altsaa ikke B, B ikke A; forsaavidt Grændsen udelukkende er qvalitativ, er her intet Mellemværende: hvor A ophører, begynder B, her er ingen Overgang, ingen Tilnærmelse. Bliver Grændsen mellem A og B derimod tillige qvantitativ, da viser sig et Mellemværende; det vil sige: man kan, dersom det Qvantiterende er en Gradforskjel, forstærke B ved at svække A, og omvendt; eller, dersom det Qvantiterende er et Afstandsforhold, nærme sig til B ved at fjerne sig fra A, og omvendt. Idet her er en Qvalitetsbestemmelse, er her altsaa en bestemt Modsætning; idet her i det Qvalitative er en Qvantiteren, er her imellem de modsatte Led et Mellemværende; idet her er et Mellemværende, er her en Overgang, og i Overgangen en Tilnærmelse.

Da her nu ikke alene gives en qvalitativ Forskjel imellem Endeligt og Uendeligt, men indenfor Endelighedens Enemærker tillige en qvalitativ Forskjel imellem de endelige Størrelser indbyrdes: kan Tilnærmelsen, som Følge heraf, være deels en Tilnærmelse af Endeligt ved Endeligt til Endeligt, og derved til et Opnaaeligt; deels en Tilnærmelse enten af Endeligt ved Uendeligt til Endeligt, eller af Endeligt ved Endeligt til Uendeligt, og derved til et Uopnaaeligt. Ved den uendelige Tilnærmelse bliver det Uopnaaelige dog opnaaet.

α) Et Opnaaeligt: Tilnærmelse af Endeligt til Endeligt.

Naar Diogenes, idet han disputerede med Eleaterne

om Bevægelsen, gik, efter Sigende, frem og tilbage, for saaledes i Gjerning at bevise Bevægelsens Realitet; da var dette en overfladisk Beviismaade. Ved at gaae frem og tilbage viste han kun i det Sandselige en Overgang fra Endeligt til Endeligt, en Tilnærmelse til et Opnaaeligt, der egentlig ikke var omtvistet. Her er paa en saadan Vei t. Ex. 12 Skridt fra Udgangspunktet til Maalet; naar 1 Skridt er gjort, er der kun 11 Skridt tilbage; naar 11 Skridt ere gjorte, er der kun 1 Skridt tilbage; 1 Skridt er en endelig Længde, 12 Skridt er en endelig Afstand; Den, der allerede har gjort 11 Skridt, er naturligviis Maalet 10 Skridt nærmere, end Den, der kun har gjort 1 Skridt: Bevægelsen i det Endelige, den endelige Tilnærmelse, er Noget, der i den Grad forstaaes af sig selv, at her endnu ikke kan være Tale om noget Problem. Problemet viser sig først, naar Uendeligheden kommer med. I det Endelige kan en Tilnærmelse unegtelig begynde, naar En blot vil gjøre det første Skridt; men just i Forhold til Uendeligheden gjælder det: c'est le premier pas qui coute, thi i det første Skridt ligger hele Problemet. For at kunne gjøre et heelt Skridt, maa man først gjøre et halvt Skridt; for at gjøre et halvt Skridt, maa man først gjøre det Halve af et halvt Skridt; forud for det Halve af et halvt Skridt gaaer det Halve af det Halve af det Halve — i det Uendelige — af et halvt Skridt. Det er altsaa ikke Spidsfindighed, men logisk Consequens, naar Bevægelsesproblemet føres tilbage til en uendelig lille Deel af det første Skridt, Grændsen imellem Begyndelsens Nulpunkt og Veiens mindste endelige Stykke.

β) Et Uopnaaeligt: Tilnærmelse af Endeligt til Uendeligt.

Det uendelig Store er Endeligheden for stort, thi Endeligheden rummer kun det endelig Store; det uendelig Lille er Endeligheden for lille: det Uendelige er et for Endeligheden Uopnaaeligt. Kan der da gives en Tilnærmelse til et Uopnaaeligt? At der gives en Tilnærmelse til

et Opnaaeligt, forstaaer sig. „Tilnærmelse til et Opnaaeligt indeholder ingen Modsigelse; et Uopnaaeligt uden Tilnærmelse er heller ikke nogen Modsigelse. Der er saaledes intet Modsigende i den Sætning, at parallele Linier, hvormeget de end forlænges, aldrig ville skjære hinanden. Naar Mathematikeren undertiden bruger det Udtryk om parallele Linier, at de, forlængede i det Uendelige, ville skjære hinanden: da kan man herved ikke egentlig tænke paa nogen Tilnærmelse; det er en Umulighed, her fremstilles under Mulighedens Form. Tilnærmelse til et Uopnaaeligt synes derimod at frembyde den haardeste af alle Modsigelser. Ved Tilnærmelse maa man jo dog i en eller anden Forstand komme Maalet nærmere; men at komme Maalet nærmere maa dog vel være det Samme som at komme Opnaaelsen nærmere; men fra Opnaaelsen af det Uopnaaelige er man jo altid lige langt borte." [1])

„Skulle Begreberne: „Uopnaaeligt" og „Tilnærmelse" bringes i logisk Forbindelse, da kunde man ifølge »diversus respectus« maaskee begynde med at tænke sig Sagen saaledes: Kategorien „Tilnærmelse" maa altid sees fra to Synspunkter: 1) det Punkt, hvorfra man gaaer ud, Begyndelsespunktet, og 2) det Punkt, der skal naaes, Maalet, Endepunktet. Gives der overhovedet nogen Bevægelse fra et bestemt Udgangspunkt henimod et Maal, saa kan man, dersom Maalet er uendelig langt borte, jo i en Forstand gjerne indrømme, at enhver Tilnærmelse er som et Intet imod Maalets uendelige Fjernhed, og dog, naar man seer tilbage, betragte den fortsatte Fjernelse fra Udgangspunktet som en Tilnærmelse til Maalet. Her er altsaa i en Henseende, forsaavidt man nemlig seer fremad, ingen Tilnærmelse, men dog i en anden Henseende, naar man, vel at mærke, seer tilbage, en virkelig Tilnærmelse". Ifølge denne Forklaring skulde man altsaa see Tilnærmelsen som en Bort-

[1]) Phil. og Mathem. S. 25—26

fjernelse, og see fremad ved at see tilbage; hvilket er en Modsigelse.

γ) Den uendelige Tilnærmelse.

Tilnærmelse til et Uopnaaeligt er en Modsigelse, naar man nemlig forudsætter, at den skulde kunne standse ved dette eller hiint endelige Punkt. Naar Tilnærmelsens Maal er opnaaeligt, fuldendes den ved Maalets Opnaaelse, og faaer altsaa en Ende; men den Tilnærmelse, der er rettet imod det Uopnaaelige, kan aldrig ende, dens Fuldendelse er dens uafbrudte Fortsættelse: den er og maa være uendelig. At Overgangen fra Endeligt til Uendeligt kan bestemmes ved uendelig Tilnærmelse, har sin Grund i Endelighedens Væsen. Det Endelige kan nemlig paa dobbelt Maade fortsætte sig saaledes, at det netop ved denne sin Fortsættelse ophæver sig selv, og gaaer over i det Uendelige.

I den til Qvotienten $\frac{1}{1-1}$ svarende Række $1+1+1+\ldots$ sees det Endelige at fortsætte sig i endelige Led uden Ende; standses her ved et vilkaarligt Led, da kan Leddenes Antal være saa stort man vil, det er dog alligevel kun et endeligt Antal: Rækken har kun endelig Værdi, her er ingen Tilnærmelse til det Uendelige. Fortsættes Rækken derimod uden Afbrydelse, da er Fortsættelsen en uophørlig Overskriden af den endelige Grændse, men en fortsat Overskriden af den endelige Grændse, er en Tilnærmelse til det Uendelige, en uendelig Tilnærmelse.[1]) I Rækken $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots$ er hele Størrelsen indesluttet mellem endelige Grændser, da $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$; men for Leddenes Formindskelser er her ingen værende Grændse, saalidt som her

[1]) Ved denne uendelige Tilnærmelse tages endnu ikke Hensyn til Forskjellen imellem convergente og divergente Rækker, men ene og alene til det Endeliges egen Uendeliggjørelse.

i det Endelige er nogen Grændse for Leddenes Antal. At Uendelighedsgrændsen er uopnaaelig, betegnes derved, at enhver endelig Grændse maa overskrides; men, idet Grændsen overskrides, er her jo dog en Tilnærmelse til det Uendelige, forsaavidt Tilnærmelsen selv er uendelig.

I geometrisk Form kan den uendelige Tilnærmelse anskueliggjøres ved Forholdet imellem en Hyperbelgreen og dens Asymptote. Til Hyperblens Ligning: $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ svarer Asymptotens Ligning: $y_1 = \frac{b}{a}x$, og Ligningen: $y_1 - y = \frac{ba}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$ til den mellem begge efterhaanden forsvindende Afstand.. I et saadant Exempel sees det eiendommelige Forhold mellem Anskuen og Tænken, et Forhold, som for Uendelighedsproblemet og dets Løsning er afgjørende. Forsaavidt Curven med dens Asymptote fremstilles for Anskuelsen, maa den Paastand, at disse Linier umulig under endelig Fortsættelse nogensinde skulde kunne berøre hinanden, forekomme som et Paradox; men den anførte Ligning for $y_1 - y$ beviser, at dette Paradox er en uimodsigelig Sandhed. Her er en fortsat Tilnærmelse, thi jo større x bliver, desto mindre bliver $y_1 - y$; men da $y_1 - y$ først kan blive 0, naar x bliver ∞, er Maalet uopnaaeligt, og Tilnærmelsen uendelig.

c) Tilnærmelsen i punktuel Udvikling.

Det Endelige er i sig et Ufuldendt, dets Fuldendelse en Overgang i det Uendelige; som det Endeliges Negation, som Abstraction, er det Uendelige ligeledes et Ufuldendt, dets Fuldendelse en Fremgang af det Endelige; det Endeliges og det Uendeliges reflecterede Eenhed er altsaa ikke en Væren, men en Vorden: i Vorden har den uendelige Tilnærmelse sit kategoriske Udtryk. Men en almindelig Vorden uden en Tilværen, hvori Vorden foregaaer, er

intetsigende, og en almindelig Tilværen uden tilværende Led umulig; skal altsaa den Vorden, hvori det Endelige og det Uendelige enes som i uendelig Tilnærmelse, tydeliggjøres, da maa denne Vordens Begreb vise sig som et Punktligheds-begreb.

Punktlighedsbegrebet kan nu vistnok som Begreb ikke fordre en udtrykkelig Opregnen af alle enkelte Led og Forhold i alle enkelte Tilfælde, thi, da en saadan Opregnen er umulig, vilde det Almene gaae tabt, og Begrebet forsvinde; derimod kan og maa Punktualiteten fordre, at Muligheden til en Bestemmelse af de enkelte Led i deres eiendommelige Forhold reflecterer sig i det almene Udtryk som i en exact Formel. De Overgange, hvori det Endeliges ogdet Uendeliges Vorden punktualiseres, blive da at opfatte saavel fra den mathematiske som fra den logiske Side, og deres lov-bestemte Mangfoldighed at paavise, ikke blot i Functioner, men i Systemer af Functioner.

α) Mathematisk-logiske Overgange.

Begrebsudviklingens Overgange lade sig i Almindelighed charakterisere derved, at der af en given Forudsætning udbrages en Consequens, og at der i og med Consequensen sættes en ny Bestemmelse. Falder Eftertrykket paa Consequensens Udvikling af Forudsætningen, er Overgangen analytisk; falder Eftertrykket paa den nye, særlig tilføiede Bestemmelse, er Overgangen synthetisk: det Analytiske forholder sig til den i Forskjellen fremherskende Identitet, som det Synthetiske til den i Identiteten fremherskende Forskjel. Med Identitet og Forskjel er al Tænkning beskæftiget; men i Logiken anderledes end i Mathematiken. I Logiken er Tænkningen *Reflexion*, i Mathematiken *Operation*; har nu det Analytiske Overvægt over det Synthetiske, da bliver Tænkningen i logisk Forstand *objectiv* Reflexion, forsaavidt den mathematiske Handling bliver en Transformation; har omvendt det Synthetiske Overvægt over det Analytiske, da

bliver Tænkningen, logisk seet, **teleologisk** Reflexion, forsaavidt den mathematiske Handling bliver en Combination.

αα) **Analysens og Synthesens exacte Anvendelse: Operation.**

Ifølge den kantiske Fornuftkritik beroer den rene Mathematik paa „synthetiske Domme a priori". Sætninger som: „5 + 7 = 12"; „den lige Linie er den korteste Vei imellem to Punkter," o. fl., grunde sig paa en „Synthesis a priori". Ifølge den hegelske Logik ere de arithmetiske Læresætninger derimod, paa enkelte Undtagelser nær, formelt analytiske. Sandheden er, at den mathematiske Erkjendelse maa, hvad der nødvendig følger af Operationens Væsen, være analythisk-synthetisk fra Først til Sidst.[1]) Ligningen: a + a = 2a

[1]) Spørgsmaalet om Forholdet imellem den analytiske og synthetiske Dom falder vistnok ikke umiddelbart sammen med Spørgsmaalet om den analytiske Methodes Forhold til den synthetiske; ikke desto mindre er det Dialektiske dog i lige Grad gjældende for begge Forhold. Til nærmere Oplysning lade vi Kant og Hegel udtale sig udførligere.

Kant (Kritik der rein. V. Gesammtausgab. Leipzig 1838. Einleitung S. 46—48): „Man sollte anfänglich zwar denken: daß der Satz 7 + 5 = 12 ein bloß analytischer Satz sei, der aus dem Begriffe einer Summe von Sieben und Fünf nach dem Satze des Widerspruchs erfolge. Allein, wenn man es näher betrachtet, so findet man, daß der Begriff der Summe von 7 und 5 nichts weiter enthalte, als die Vereinigung beider Zahlen in eine einzige, wodurch ganz und gar nicht gedacht wird, welches diese einzige Zahl sei, die beide zusammengefaßt. Der Begriff von Zwölf ist keineswegs dadurch schon gedacht, daß ich mir jene Vereinigung von Sieben und Fünf denke, und ich mag meinen Begriff von einer solchen möglichen Summe noch so lange zergliedern, so werde ich doch darin die Zwölf nicht antreffen. Man muß über diese Begriffe hinausgehen, indem man die Anschauung zu Hülfe nimmt, die einem von beiden correspondirt, etwa seine fünf Finger, oder (wie Segner in seiner Arithmetik) fünf Puncte, und so nach und nach die Einheiten, der in der Anschauung gegebenen Fünf zu dem Begriffe der Sieben hinzuthun. (Jvfr. Phil. Propæd. S. 180—181).

er i Grunden en analytisk Dom, der siger, at Multiplicationen kun er en Addition; men da Multiplicationen jo

---

Hegel derimod (Wissensch. der Log. 2te Theil. Berlin 1834. S. 282—83 o. flg.): „Bekanntlich wird die Arithmetik und die allgemeineren Wissenschaften der discreten Größe vorzugsweise analytische Wissenschaft und Analysis genannt .... der Fortschritt ist die Reduktion des Ungleichen auf immer größere Gleichheit. Um ein Beispiel an den ersten Elementen zu geben, so ist die Addition das Zusammenfassen ganz zufällig ungleicher Zahlen, die Multiplikation dagegen von gleichen, worauf noch das Verhältniß der Gleichheit von der Anzahl und der Einheit folgt, und das Potenzen-Verhältniß eintritt."

„Weil nun die Bestimmtheit des Gegenstandes und der Verhältnisse eine gesetzte ist, so ist die weitere Operation mit ihnen auch ganz analytisch, und die analytische Wissenschaft hat daher nicht sowohl Lehrsätze, als Aufgaben. Der analytische Lehrsatz enthält die Aufgabe schon für sich selbst als gelöst, und der ganz äußerliche Unterschied, der den beiden Seiten, die er gleich setzt, zukommt, ist so unwesentlich, daß ein solcher Lehrsatz als eine triviale Identität erscheinen würde. Kant hat zwar den Satz $5 + 7 = 12$ für einen synthetischen Satz erklärt .... Allein wenn das Analytische nicht das ganz abstract Identische und Tautologische $12 = 12$ bedeuten, und ein Fortgang in demselben überhaupt seyn soll, so muß irgend ein Unterschied vorhanden seyn, jedoch ein solcher, der sich auf keine Qvalität, keine Bestimmtheit der Reflexion und noch weniger des Begriffs gründet. $5 + 7$ und 12 sind durchaus ganz derselbe Inhalt .... Hier ist im Geringsten kein Uebergang zu einem Andern; es ist ein bloßes Fortsetzen, d. h. Wiederholen derselben Operation, durch welche 5 und 7 entstanden ist."

„Der Beweis eines solchen Lehrsatzes — einen solchen erforderte er, wenn er ein synthetischer Satz wäre — würde nur in der Operation des durch 7 bestimmten Fortzählens von 5 an, und in dem Erkennen der Uebereinstimmung dieses Fortgezählten mit dem bestehen, was man sonst 12 nennt, und was wieder weiter nichts, als eben jenes bestimmte Fortzählen selbst ist" .... „Es ist daher ein höchst überflüssiges Gerüste, hier die Form der geometrischen Methode, welche sich auf synthetische Sätze bezieht, anzuwenden und der Aufgabe außer der Auflösung auch noch einen Beweis folgen zu lassen. Er kann nichts als die Tautologie

dog alligevel er en særegen Handling, en eiendommelig Function, er Dommen tillige synthetisk. Det Samme gjælder om

---

ausdrücken, daß die Auflösung richtig ist, weil man operirt hat, wie aufgegeben war. Wenn die Aufgabe ist, man soll mehrere Zahlen addiren; so ist die Auflösung: man addire sie; der Beweis zeigt, daß die Auflösung richtig ist, darum weil aufgegeben, war zu addiren, und man addirt hat." —

Hvad den synthetiske Erkjendelse angaaer, lægger Hegel (Anfrt. Skrift S. 288—313) særdeles Eftertryk paa Forholdet imellem Definitionen, Inddelingen og Læresætningen. „Die Definition enthält nur Eine Bestimmtheit, die Eintheilung die Bestimmtheit gegen andere; in der Vereinzelung ist der Gegenstand in sich selbst aus einander gegangen. Insofern die Defintion beim allgemeinen Begriffe stehen bleibt, so ist dagegen in den Lehrsätzen der Gegenstand in seiner Realität, in den Bedingungen und Formen seines reellen Daseyns erkannt" ... „Der Lehrsatz nun nach der angegebenen Bestimmung ist das eigentlich Synthetische eines Gegenstandes, insofern die Verhältnisse seines Bestimmtheiten nothwendig, das ist, in der innern Indentität des Begriffes gegründet sind. Das Synthetische in der Definition und Eintheilung ist eine äußerlich aufgenommene Verknüpfung; das Vorgefundene wird in die Form des Begriffes gebracht, aber als vorgefunden wird der ganze Inhalt nur monstrirt; der Lehrsatz aber soll demonstrirt werden." .... „Das glänzende Beispiel der synthetischen Methode ist die geometrische Wissenschaft (S. 313). .... „Wenn man die Lehrsätze" — hedder det S. 307 — „einer synthetischen Wissenschaft, und namentlich der Geometrie, näher vergleicht, so wird sich dieser Unterschied zeigen, daß einige ihrer Lehrsätze nur einzelne Verhältnisse des Gegenstandes enthalten, andere aber solche Verhältnisse, in welchen die vollständige Bestimmtheit des Gegenstandes ausgedrückt ist. Es ist eine sehr oberflächliche Ansicht, wenn die sämmtlichen Sätze an Werth einander gleichgeachtet werden, weil überhaupt jeder eine Wahrheit enthalte, und im formellen Gange, im Zusammenhange des Beweisens gleich wesentlich sey.

At denne paa Adskillelse af Definition, Inddeling og Læresætning hvilende Opfattelse af den synthetiske Methode imidlertid ligesaavel passer paa Arithmetiken som paa Geometrien, er da blandt Andet indlysende deraf, at Arithmetiken ligesaavel behøver Definitioner, Inddelinger og Læresætninger, som Geometrien.

$a . a = a^2$ o. s. fr. Hvorledes det Synthetiske under en fremadskridende Operation kan voxe med det Analytiske, kan udtrykkelig paavises. I en Ligning, som: $a^x = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots$ kan Relationen imellem Coefficienterne først

I Elementær Algebra ved C. Ramus, Kbhvn 1855, navnlig i „Andet Afsnit. Fundamentalsætninger om hele Tal", samt i „Tredie Afsnit. Irrationalitet og Approximation; Decimalbrøker", forekomme arithmetiske Theoremer, og Methoden er altsaa forsaavidt synthetisk. Er nu den synthetiske Methode anvendelig i Arithmetiken, da er, hvad den nyere Videnskab fornemmelig skylder Cartesius, den analytiske Methode omvendt jo ogsaa anvendelig paa Geometrien. Hvad her paa den ene Side opstilles som Læresætning, og behandles synthetisk, kan da paa den anden Side fremstilles som Opgave, og behandles analytisk. „Den Linie, som halverer Linien AB og staaer lodret paa samme, er det geometriske Sted for de Punkter, som have ligestor Afstand fra de to faste Punkter A og B." At man, idet man af de retvinklene Trianglers Congruens beviser denne Læresætning, skulde komme til en indholdsrigere Erkjendelse, end ved at forvandle Læresætningen til Opgave, og løse Opgaven analytisk, er ikke til at indsee. Tvertimod! idet Opgaven behandles analytisk, idet man vælger et retvinklet Coordinatsystem t. Ex. det, der har AB til X-Axe og A til Begyndelsespunkt, og lader Punktet (x, y) være et af de søgte Punkter, har man, for $AB = a$, $x^2 + y^2 = (a - x)^2 + y^2$, og i Ligningen $x = \pm (a - x)$ en dobbelt Løsning, nemlig $x = \frac{a}{2}$, der betegner en ret Linie gjennem Midtpunktet af AB og lodret derpaa, og $x = \infty$, d. e. en ret Linie ligeledes lodret paa AB, men i en uendelig Afstand fra Punkterne A og B. Medens nu den synthetiske Læresætning kun angav een Linie som det geometriske Sted, har Analysen derimod viist, at her kunne være to Linier; den analytiske Methode har altsaa i dette Tilfælde givet en rigere Erkjendelse end den synthetiske. Det vil da uden Tvivl, jo omhyggeligere man undersøger Sagen, blive stedse tydeligere, at, forsaavidt man ikke lader Adskillelsen af analytisk og synthetisk Methode gjælde efter Tradition og Vedtægt, men seer paa Erkjendelsens Væsen, kunne de to Methoder ikke holde sig afsluttede ligeoverfor hinanden, men det Analytiske maa, selv hvor det fremhersker, overalt forudsætte det Synthetiske, og omvendt, det Synthetiske det Analytiske.

udfindes, naar man hermed sammenstiller en anden Ligning af samme Form, t. Ex. $a^z = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots$ Multipliceres nu de to Ligninger med hinanden saaledes, at Productet erholder en dobbelt Form, nemlig: $a^x a^z = A_0 + A_1^2 xz + A_2^2 x^2 z^2 + \ldots$ og $a^{x+z} = A_0 + A_1 (x + z) + A_2 (x+z)^2 + \ldots$, da sees allerede heraf, hvorledes det Synthetiske under Operationen er blevet forstærket ved den fortsatte Analyse. Synthesens Medvirken bliver især kjendelig, naar man, efter at have udviklet det ene Led $A_2 (x + z)^2$, sammenligner $2 A_2 xz$ med $A_1^2 xz$ i den første Række, thi $2 A_2$ og A_1^2 stille sig da som Coefficienter, der tilhøre hver sin Række, med en saa umiddelbar Selvstændighed ligeoverfor hinanden, at man, for at bevise deres Identitet, maa anvende de ubestemte Coefficienters Methode.

Hvad det Endeliges Overgang i det Uendelige selv angaaer, beroer det i Tilnærmelsen Punktuelle væsentlig paa Forholdet imellem Analysen og Synthesen. I Qvotienten $\frac{1}{1-x}$ ere de endelige Led: 1 og x saaledes sammenstillede (Synthese), at en uendelig Række heraf lader sig udvikle (Analyse). Udviklingens intellectuelle Handling, Operationen, er „en Synthesis a priori"; men en Synthesis a priori er en analyserende Synthesis: det Aprioriske er analytisk.

ββ) Analyse paa synthetisk Grundlag: Transformation.

Er det nu det samme Indhold, der fremstilles i forskjellig Form, har Analysen Overvægt over Synthesen. I Ligningen: $\frac{a+b}{c+d} = \frac{1}{c+d}(a+b)$ er det ene Udtryk kun en Omskrivning af det andet; selv i Ligningen $\frac{a+b}{c+d} = \frac{1}{c}(a+b)(1 - \frac{d}{c} \ldots)$ hersker det Analytiske. Forsaavidt Analysen anvendes til Løsning af en bestemt Opgave, er en Ombytten af de forskjellige Udtryksmaader dog alligevel mere end en

vilkaarlig Omskrivning; den er en Omformen, der betinger Indholdets Udvikling, en væsentlig Omdannelse, en Transformation. Qvotienten $\frac{a+b}{c+d}$ udtrykker en bestemt Relation imellem Størrelserne a, b, c og d; Produktet $\frac{1}{c}(a+b)(1 - \frac{d}{c}\ldots)$, hvori en uendelig Tilnærmelse er antydet, udtrykker Relationen imellem de samme Størrelser paa en anden Maade, og bidrager derved til at give Relationen en fuldstændig Gjennemsigtighed; den til fuldstændig Gjennemsigtighed klarede Relation er objectiv Reflexion.

Hvorledes Transformationen tjener den objective Reflexion, og betinger Indsigten, kan en nærmere Behandling af Rækken: $a^x = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots$ vise. At Rækken gaaer frem efter stigende Potenser af x, er saa indlysende, at man i denne Henseende strax kan angive det nte Led ved $A_{n-1} x^{n-1}$, og i dette ene Udtryk finde Rækkens utallige Potenser af x reflecterede. En saadan Reflexion finder derimod endnu ikke Sted, hvad Coefficienterne $A_0, A_1, A_2, \ldots$ angaaer. At her maa være en Relation imellem disse Coefficienter og a i Udtrykket: a^x, tør forudsættes; men for at denne Relation skal kunne paavises og klares i Reflexion, maa Transformationen anvendes. Ved at sætte $x = 0$, og finde $a^0 = A_0 = 1$, kan man da for det Første transformere Rækken til $a^x = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots$; ved dernæst, i Consequens af vort Foregaaende $A_2 = \frac{A_1^2}{1.2}$ at sætte $A_3 = \frac{A_1^3}{1.2.3}$, $A_m = \frac{A_1^m}{1.2.3\ldots m}$, kan man transformere Rækken til $a^x = 1 + A_1 \frac{x}{1} + A_1^2 \frac{x^2}{1.2} + A_1^3 \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$, og paa denne Maade see Rækkens utallige Coefficienter reflecterede i A; sætter man nu endvidere $x = \frac{1}{a}$, og hvorved Rækken forandres til: $a^{\frac{1}{A_1}} = 1 + \frac{A_1}{1}\left(\frac{1}{A_1}\right) + \frac{A_1^2}{1.2}\left(\frac{1}{A_1}\right)^2 + \ldots$

$= 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots = e$, samt $A_1 = \frac{\log a}{\log e}$, eller, i det naturlige System, $A_1 = l.a$, saa transformeres Rækken endelig til $a^x = 1 + l.a\frac{x}{1} + (l.a)^2\frac{x^2}{1.2} + (l.a)^3\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$; og man har da en Form, der hæver Relationen til alsidig Reflexion. [1])

Idet Forholdet mellem det Endelige og det Uendelige punktuelt bestemmes ved Tilnærmelse, svæver det dialektisk imellem Forestilling og Reflexion. De særskilte Led i den uendelige Række ere til for Forestillingen, og i Forestillingen hersker det Endelige; men naar den alsidige Relation er paaviist, og Rækkens utallige Led sees at reflectere sig saavel i a^x, som i hverandre indbyrdes, kommer Uendeligheden tilsyne: det Uendelige er ikke til for Forestillingen, det er kun i Reflexionen for den rene Indseen.

γγ) Synthese paa analytisk Grundlag: Combination.

Aabner Analysen nu for Indsigten en saadan Mængde Muligheder, at Synthesen gaaer i Eet med Valget af de Tilfælde, der netop behøves til Opgavens Løsning, bliver Reflexionen teleologisk. Har man saaledes ved Analysen forvisset sig om, at Coefficienterne i Rækken: $a^x = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots$ alle ere indeholdte i Formlen: $A_m = \frac{A_1^{\,m}}{1.2.3\ldots m}$, da er en Bestemmen af den Relation, hvori A_1 staaer til a^x, nærmeste Opgave. Denne Opgaves Løsning er altsaa et Formaal; men til Formaalets Opnaaelse gjælder det her, iblandt Millioner mulige Tilfælde at vælge just det Tilfælde, der afgiver Midlet; den omfattende Opgave

---

[1]) At Reflexionen nu er gjennemført, sees da ogsaa deraf, at alle særskilte Led med deres eiendommelige Bestemthed afspeile sig i det nte eller almindelige Led: $l(a)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}$.

medfører en Mangfoldighed af mindre Opgaver: den Udvei, at sætte $x = \frac{1}{A_1}$ er valgt blandt utallige Muligheder, og forudsætter en oversvævende Bevidsthed.

Idet den teleologiske Reflexion saaledes bestemmer den exacte Handling, og opgaaer i den, er Operationen combinerende. Ere de ueensartede Rækker: $e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots$, $\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots$, hver især udviklede og bestemte ved en Synthesen overveiende Analyse; da kunne disse Rækker, hvad Euler har viist, igjen combineres ved en Analysen overveiende Synthese. I Combinationen hersker det Synthetiske; men de Ligheder, Muligheder og Mellemled, hvorpaa Overgangene beroe, maae prøves og retfærdiggjøres ved Analysen. Det Mellemled, Combinationen her fordrer,[1]) nemlig $\sqrt{-1}$

[1]) Medens de for Udviklingen særegne Udgangspunkter angives og fastsættes ved combinerende Synthese, beroer Udviklingen selv derimod paa Analysen. Under Combinationen kunne de ledende Synspunkter fastsættes saaledes, at Synthesen ikke blot faaer eet, men flere endog meget forskjellige Mellemled. Udvikles til Ex. $e^{\pm x\sqrt{-1}}$ i Række, faaes ved en Adskillelse af den reelle og den imaginære Deel: $\left\{1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots\right\} \pm \left\{x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots\right\}\sqrt{-1}$, som kan betegnes ved $C(x) \pm S(x)\sqrt{-1}$. Viser det sig nu ved hensigtssvarende Behandling af dette Udtryk, at navnlig: 1) $C^2(x) + S^2(x) = 1$, 2) $S(x \pm y) = S(x)C(y) \pm C(x)S(y)$ og $C(x \pm y) = C(x)C(y) \mp S(x)S(y)$, 3) $C(4pq + x) = C(x)$ og $S(4pq + x) = S(x)$: da slutte vi, at dersom q „findes at have Værdien $\frac{\pi}{2}$, for hvilken $\cos = 0$, $\sin = 1$, saa kunne $C(x)$ og $\cos x$, $S(x)$ og $\sin(x)$ gjennemløbe de samme Værdier for de samme x, og altsaa være identiske." π er altsaa

betegner en Periodicitet, thi ved fortsat Potenseren, giver $\sqrt{-1}$: $\sqrt{-1}$, -1, $-\sqrt{-1}$, $+1$, $\sqrt{-1}$ o: s. fr. Sættes altsaa $e^{x\sqrt{-1}}$ istedetfor e^x, erholdes følgende Resultater: $e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sin x \sqrt{-1}$, hvorved den exponentielle Function er combineret med de trigonometriske; dernæst $x\sqrt{-1} = l(\cos x + \sin x\sqrt{-1})$, hvorved Logarithmens Begreb lader sig udvikle derhen, at $l(+a) = l^1 a + 2p\pi \sqrt{-1}$ viser sig reel for $p = 0$, hvorimod $l(-a) = l^1 a + (2p+1)\pi\sqrt{-1}$ aldrig kan blive reel for nogensomhelst heel Værdi af p. Ifølge Combinationen blive altsaa Overgangene fra det Endelige i det Uendelige ikke blot forskjelligartede, men ogsaa planmæssige, og de planmæssige Overgange utallige.

β) Functionssystemer: den indre Uendelighed.

Den mathematiske Function, der, ifølge sit Begreb, udtrykker det Foranderliges dialektiske Eenhed med det Uforanderlige, udtrykker med det Samme det Endeliges Overgang i det Uendelige: saamange Functioner, saamange Overgange, saa mange Former for den punktuelle Vorden, saamange Tilnærmeliens Veie. Disse Veie løbe ikke blot ved Siden af hinanden; de krydse hinanden, de slynge sig i hinanden, de danne et Net, hvori det Endelige, saa at sige, fanger det Uendelige. For Operationen er nu dette Net et System af Functioner, ja, af Functionssystemer; for Reflexionen er det Udfoldningen af det Uendeliges Indhold, den indre Uendelighed. De logiske Grundbevægelser i Eenhed med de exacte Handlinger ere da: en Henføren af de mange Functioner under en Grundformel, en Udvikling af de særskilte Functioner, forsaavidt disse hver for sig lade sig aflede af den fælleds Grundformel, og endelig en Paa-

---

her, idet vi slutte saaledes, et Synthesens Mellemled. Jvfr. A. Steen. Reen Mathematik. Kbhvn 1856. S. 318—26.

viisning af den Betydning, de punktuelle Tilvæxter og Rester i hver særskilt Række erholde.

αα) Functionssystemernes Grundformel: Reduction.

Ligesom de mange endelige Tilfælde kunne henføres under en særskilt Function, saaledes kunne de mange særskilte Functioner henføres under en Grundformel. Ved denne Reduction bliver det Enkelte og Særskilte jo vistnok opløst i det Almene, og gaaer forsaavidt, logisk talt, til Grunde. Men at gaae til Grunde betyder, hvad Schelling og Hegel i metaphysisk Retning have paaviist, et Dobbelt: at tilintetgjøres, det vil sige: opløses, og at ophæves d. e. opbevares i sin Grund. For at reducere, maa man omforme: enhver Reduction er en Transformation, men ikke omvendt. Hvad den exacte Udvikling angaaer, kunne alle mulige Functioner af x + h henføres til den saakaldte taylorske Række: $f(x+h) = f(x) + f'(x)\frac{h}{1} + f''(x)\frac{h^2}{1.2}$ + ... Denne Række, der har det Eiendommelige ved sig, at Coefficienterne til de stigende hele og positive Potenser af h ere Functioner af x, viser hvorledes en Function af x kan udfolde sig i et System af Functioner, naar x faaer Tilvæxten h. Forsaavidt $f(x)$ endnu ikke er nærmere bestemt, er det hele af $f(x+h)$ fremgaaende Functionssystem ligeledes ubestemt; men denne Ubestemthed er, hvad der ligger i Grundens Væsen, ikke desto mindre en negativ Bestemthed, en Reflexion af opløste og i Opløsningen bevarede Functioner. Den opstillede Formel er ikke et umiddelbart Første; den er ifølge Reductionen et til væsentlig Forudsætning forvandlet Resultat, og som saadan Grundformel.

Hvilken Forskjel det gjør, om man i Erkjendelsen kommer til det Almene ved Abstraction alene, eller ved Reduction, kan sees i nærværende Sammenhæng. Ifølge Abstractionen er det Almene tomt, den opstillede Række et dødt Schema, der falder udenfor det Indhold, hvormed det vil-

kaarlig kan udfyldes; ifølge Reductionen er det Almene det i Grunden Indholdsrige, der stadfæster sin Almeengyldighed ved Begrundelsen af det Særskilte. At de særskilte Functionsrækker reduceres til een Grundformel, vil med andre Ord sige, at de særskilte Love have deres Bestaaen i een Grundlov.[1])

$\beta\beta$) Særskilte Functionssystemer: Deduction.

Kun hvad der indeholdes i Grunden kan under givne Betingelser udledes af den; Deductionen forudsætter Reductionen. Betingelsen for et særeget Systems Udtræden af Grundformlen er en udtrykkelig Fastsætten af den oprindelige Function. Kjender man nemlig den Lov, hvorefter $f'(x)$, udviklet i Række ifølge Grundformlen, fremkommer af Rækkeudviklingen for $f(x)$, saa kjender man med det Samme den Lov, hvorefter $f''(x)$ afledes af $f'(x)$, $f'''(x)$ af $f''(x)$ o.s.fr. Sættes t. Ex. $f(x) = ax$, bliver Rækken for $a(x + h)$ til $ax + ah$; sættes $f(x) = x^a$ og $f(x + h) = (x + h)^a$, faaes Systemet: $x^a + ax^{a-1}\frac{h}{1} + a(a - 1)x^{a-2}\frac{h^2}{1.2} + \ldots$; til $f(x) = a^x$ og $f(x + h) = a^{x+h}$ svarer Systemet: $a^x(1 + la\frac{h}{1} + (l.a)^2\frac{h^2}{1.2} + \ldots)$; til $f(x) = l.x$, og $f(x + h) = l.(x + h)$ Systemet: $l\,x + \frac{1}{1}\frac{h}{x} \div \frac{1}{2}\frac{h^2}{x^2} + \ldots$ o. s. fr. I Forhold til Reductionen er Muligheden Grund, i Forhold til Deductionen er Grunden Mulighed. Identiteten af Grund og Mulighed sees af den disjunctive Doms forskjellige For-

---

[1]) Fra Bestemtheden af denne for Anskuelsen givne Kugleflade: $x^2 + y^2 + z^2 = 3^2$ gaaer man ved Reduction til en Bestemmelse af Fladens Art som Kugle: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, fra denne ved en ny Reduction til Kuglen som Omdreiningsflade: $z = f(x^2 + y^2)$ og fra denne særegne Art til Fladen som mathematisk Genus: $F(x, y, z) = 0$. Hvad Deductionen, den omvendte Fremgangsmaade, angaaer, maa bemærkes, at de mathematiske Individer lade sig deducere, de impiriske derimod ikke.

mer: A er hverken B eller C eller D..., $f(x)$ er hverken ax eller x^a eller a^x...; de særskilte Bestemmelser ere opløste i det Almene, og derved gaaede til Grunde; A er, i Grunden, baade B og C og D..., $f(x)$ er, i Mulighed, baade ax, x^a, a^x... Forsaavidt det i Grundens Indhold Særskilte lader sig tilsyne, reflecteres det i Mulighed; hvor eet Tilfælde er muligt, maae idetmindste to Tilfælde være mulige, thi dersom det mulige Tilfældes Modsatte ikke ogsaa var muligt, var Tilfældet selv nødvendigt: Muligheden har alternerende Led. Skal nu et af Leddene sættes som tilværende, da viser den disjunctive Dom i dens sædvanlige Form: A er enten B eller C eller D..., $f(x)$ er enten ax eller x^a eller a^x... Spændingen imellem de alternerende Led. Hvorledes det Tilværende ved en udtrykkelig Sætten afledes af Grunden, det Virkelige af Muligheden, det Særskilte af den concrete Almindelighed, kan sees af den disjunctive Slutnings dobbelte modus: $f(x)$ er enten ax eller x^a eller a^x..., nu er $f(x(= ax$, altsaa hverken x^a eller a^x..., (modus ponendo tollens), og: $f(x)$ er enten ax eller x^a eller a^x; nu er $f(x)$ hverken x^a eller a^x, altsaa maa den, forudsat, at her kun ere tre Muligheder, eller rettere at den paagjældende Mulighed kun har tre alternerende Led, nødvendigviis være ax (modus tollendo ponens). At Functionerne: ax, x^a, a^x.... udelukke hinanden (principium exclusi medii) har, ifølge Deductionen sin Betydning deri, at de i Grunden (principium inclusi medii) forudsætte hinanden. Det Samme, der gjør at $f(x + h) = (x + h)^a$ giver Rækken: $x^a + ax^{a-1}\frac{h}{1} + \ldots$, gjør ogsaa, at $a(x + h)$ giver $ax + ah$, at a^{x+h} giver $a^x + a^x \, l.\, a \frac{h}{1} + \ldots$ o. s. v., thi det er just Grundloven selv, Lovens Grundtanke.

De særskilte Systemer ere Udtryk for særskilte Love. Viser nu Reductionen, at de særskilte Love maae have deres

væsentlige Forudsætning i den ene Grundlov, saa viser Deductionen omvendt, at den ene Grundlov har sin Bestaaen, sin endelige Tilværen i de særskilte Love.

γγ) Tilvæxter og Rester: Articulation.

Som det, hvori Endeligheden opløses, er det Uendelige, væsentlig seet, det Endeliges Grund og Mulighed; en gjennemført Udvikling af Endelighedens Former er da med det Samme en Udvikling af Uendelighedens Indhold. Fordringen er, at Udviklingen bliver punktuel. Kaster man Punktualiteten bort, og holder sig eensidig ved det Almindelige, bliver man let færdig med Forskjellen imellem det i Forestillingen og i Begrebet Uendelige, eller, for at bruge Spinozas Udtryk, imellem infinitum imaginationis og infinitum actu; men anerkjendes Punktualitetens Fordringer, indlyser det, at Forestillingens Led høre med til Begrebet selv.

Hvad Qvotienten $\frac{1}{1-1}$ angaaer, er Rækken $1 + 1 + 1 + \ldots$ nødvendig til en Bestemmelse af det Uendelige; hvad Rækken angaaer, er Qvotienten nødvendig. Holde vi os til Rækken $1 + 1 + 1 + \ldots$ alene, da see vi kun den ene Side af det Uendelige, nemlig det Uopnaaelige, det, hvis endelige Fremstilling aldrig kan fuldendes, infinitum imaginationis. Holde vi os udelukkende til Betegnelsen $\frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} = \infty$, uden at betænke, hvorledes ∞ først fremkommer ifølge en uendelig Formerelse af en endelig Qvotient, idet 0 fremkommer ifølge en uendelig Formindskelse af en endelig Divisor, faae vi vel formelt et infinitum actu, et Uendelighedsbegreb, men et dødt Begreb. Til Indsigt i Uendelighedens Væsen, den indre Uendelighed, hører altsaa, at infinitum imaginationis og infinitum actu maae sættes i dialektisk Eenhed, at en Række som: $1 + 1 + 1 + \ldots$ og en Qvotient som: $\frac{1}{1-1}$ maae reflectere sig i hinanden.

Er nu Forestillingen incommensurabel med Begrebet, maa jo Articulationen af Uendelighedens Indhold blive en Articulation af den uendelige Tilnærmelse; en saadan Articulation er betinget af, at Tilvæxternes forskjellige Betydning i de forskjellige Functionssystemer paavises, samt deraf, at de uendelige Rækkers Convergens eller Divergens exact angives ved Bestemmelse af Rester og Grændser.

At en endelig Tilvæxt (h), hvormed x i $f(x)$ forøges, maa medføre en til Functionens Beskaffenhed svarende Tilvæxt til Functionen selv, og denne Tilvæxt (k) altsaa være forskjellig for de forskjellige Functioner, er en Selvfølge. Sættes $f(x) = y$, og $f(x+h) = y + k$, da indsees, at medens k, for $f(x+h) = a(x+h)$, bliver til ah, og kun udgjør eet Led, og for $f(x+h) = (x+h)^a$, for a positiv heel, til $ax^{a-1}\frac{h}{1} + a(a-1)x^{a-2}\frac{h^2}{1.2} + \ldots h^a$, og giver en Fleerhed af Led, nemlig a Led, maa k t. Ex. for $f(x+h) = a^{x+h}$ blive til $a^x + a^x(la)\frac{h}{1} + a^x(la)^2\frac{h^2}{1.2} + \ldots$ og udvikle sig i utallige Led. Men sees nu paa Rækkerne med de utallige Led, altsaa paa de uendelige Rækker, da synes en exact Udvikling af deres Værdier ved første Øiekast umulig: skal en uendelig Række udfoldes, maa den jo føres til Ende, men det er umuligt; kan den uendelige Række aldrig føres til Ende, maa der jo blive en Rest tilbage, der ikke udfoldes; men bliver der en Rest tilbage, der ikke udfoldes, maa Tilnærmelsen jo, saa synes det, tabe sig i det Omtrentlige.

I den til $\frac{1}{1-x}$ svarende Række $1 + x + x^2 + \ldots . x^{n-1}$ kan man jo gjerne tilføie Resten $\frac{x^n}{1-x}$; dog, hvorfor blive staaende ved x^{n-1}? man kunde jo ligesaa godt gaae til x^{2n-1} og saa tilføie Resten $\frac{x^{2n}}{1-x}$; men, naar Afbrydelsen

er saa vilkaarlig, hvorledes kan Resultatet da hæve sig over det Omtrentlige? Den Rest, der saaledes angives, være sig nu som $\frac{x^n}{1-x}$ eller som $\frac{x^{n+1}}{1-x}$ eller som $\frac{x^{2n}}{1-x}$ indeholder i sig et Noget, som endnu ikke er udviklet. Behøver det i Resten Indeholdte ingen Udvikling, saa behøver Qvotienten $\frac{1}{1-x}$ vel heller ingen Udvikling, og hele Rækken bliver overflødig; behøver Resten, hvorvidt man end gaaer, bestandig en Udvikling, da bliver her et Noget tilbage, som aldrig kan udvikles. Vil man bestemme Restens Værdi ved at mærke sig Forskjellen imellem saadanne uendelige Rækker, hvori hvert følgende Led er større end sit foregaaende, og saadanne, hvori det Omvendte finder Sted: da synes heller ikke denne Fremgangsmaade at kunne i hvert Tilfælde føre til et exact Resultat. Sættes t. Ex. $x = 2$ i $\frac{1}{1-x}$, saa at Rækken bliver $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots$; sættes dernæst $x = \frac{1}{2}$, saa at Rækken bliver $1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots$, da indseer man let, at Resten i den første af disse Rækker vil staae i et ganske andet Forhold til Leddenes Sum, end Resten i den anden. I første Række vil Resten, hvorlænge man end fortsætter Divisionen, beholde en uendelig stor Værdi, medens den i sidste Række vil aftage. For Rækken $1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots$ bliver Resten imidlertid ikke bestemt derved, at vi fortsætte Divisionen, men derved, at vi ad anden Vei sættes i Kundskab om den til hele Rækken svarende Værdi. Hvor lidet man nu kan stole paa en stadig Formindskelse af Resten, fordi man har en Række med stadig aftagende Led, kan sees af et andet Tilfælde, hvori vi ligeledes ad særegen Vei ere satte i

Kundskab om Rækkens sande Værdi. Da nemlig $a^{-\infty} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\infty} = 0$, saa er $\mp\infty = \text{Log}\,0$; men $\text{Log}\,0 = \text{Log}\,(1-1) = -\text{Log}\,e\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\frac{1}{n}+\ldots\right)$, og, i det naturlige System, $l\,(0) = -\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\frac{1}{n}\ldots\right) = -\infty$; heraf sees, at ikke enhver Række med aftagende Led giver en stedse aftagende Rest. Føies nu hertil, at der jo ere mangfoldige Rækker, hvis Rester, som f. Ex. Resten for anførte logarithmiske, eller som Resten for den til e svarende Række: $1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\ldots$ ikke engang lade sig fremstille under endelig Form: da maa det vistnok forekomme den over Punktualiteten svævende Reflexion, som fik Omtrentligheden overalt et betænkeligt Spillerum: ved Spændingen mellem det i Tilnærmelsen Omtrentlige og det Exacte, d. e. ved den i „Articulationen" skjulte Modsigelse, er Uendelighedsproblemet charakteriseret.

I hvilken Grad Uendelighedsproblemet har kunnet forbause endog den med Analysen fortrolige Mathematiker, naar han for Alvor begyndte at ville gjennemtænke det, er paa en ret slaaende Maade anskueliggjort i følgende fra les Elémens de Mathématique du P. Lami hentede Indklædning: »Le mauvais Riche brûlé de soif, prie, dit on, Abraham de lui laisser distiller une goute d'eau. Abraham obtient ce qu'il demande. Il laisse tomber une goute d'eau, qui fait 100 lieuës à la premiere minute, 99 à la seconde, ainsi de suite, toûjours en même proportion à chaque minute de 100 à 99. Or la distance des lieux où sont Abraham & le mauvais Riche étant supposée infinie, on demande en combien de tems cette goute arrivera au mauvais Riche? On répond à cela, jamais. En effet, l'espace étant infini, la goute d'eau ne peut pas parvenir à un terme. On conçoit bien que la chose ne peut être autrement. Mais ce qui a droit de sur-

prendre, c'est qu'on détermine le nombre des lieues que feroit la goute en tombant pendant une éternité; & ce nombre est 100,000 lieues. Voila donc une quantité finie déterminée, quoiqu'il n'y ait point de terme auquel elle soit limitée, le tems de la chûte d'eau étant infini. Cela est assurement inconcevable. Afin de rendre la chose sensible, on fait observer, que la chûte de la goute d'eau est rétardée, suivant l'hypothese, à chaque minute. Ce rétardement augmentant toûjours, il devient à la fin si peu considérable, qu'on peut le regarder comme nul. Alors la goute d'eau ne se meut pas; puisqu'on néglige son mouvement, qui est infiniment petit. La question est de savoir, si on peut négliger cet Infiniment-Petit, & si dans un tems infini, ce rétardement, quoique toûjours plus petit, n' a pas une valeur réelle. Notre esprit se perd dans ce raisonnement. Nous concevons que la progression decroissant toûjours, la valeur des termes doit diminuer tellement qu'elle ne soit pas sensible, & cependant nous voulons que le nombre des termes, qui composent cette progression, soit infini. Ceci est tout-à-fait contradictoire.« Application de la Géométrie ordinaire et des Calculs différentiel et intégral à la résolution de plusieurs Problémes. Par feu M. Robillard. Paris MDCCLIII. (Histoire critique du Calcul des Infiniment-Petits contenant la Métaphysique et la Théorie de ce Calcul. P. XVII—XVIII.)

III.

Det Uendeliges Analyse.

At en uendelig Tilnærmelse dog kan ende, det Uopnaaelige opnaaes, og det Omtrentlige opløse sig i det Exacte, viser det Uendeliges Analyse. For at gjøre Uendelighedsproblemet kjendeligt, maa Reflexionen støtte sig til

Operationen; for at løse Problemet, maa den tilegne sig den i Operationen udtalte Intelligens. At der imellem uendelige Størrelser kan være et endeligt Forhold, at en Sum af uendelig mange Led kan i nogle Tilfælde udgjøre en endelig, i andre en uendelig Størrelse, at en Række, hvis Led forholde sig saaledes, at det efterfølgende divideret med det foregaaende, giver Qvotienten 1, kan være enten convergerende eller divergerende o. s. v., Sligt vil overalt undgaae den Tænkning, der ikke ved Operationens Vink faaer Øie paa de exacte Bestemmelser. At nu disse Bestemmelser i philosophisk Form maae blive dialektiske, medens de i mathematisk Form hverken ere, eller kunne være det, viser en charakteristisk Forskjel imellem Mathematik og Philosophie, men ingenlunde nogen Strid. Intet Begreb kan, hvor exact det end defineres, holde sig i en mod de øvrige Begreber ligegyldig Væren: Begrebernes Gyldighed sees i deres Overgange; men de Overgange, den exacte Analyse netop gjør ved Operationen, gjør den Operationsbegreberne gjennemtrængende Tænkning ved Dialektiken.

Den exacte Bestemthed, hvori det Endelige berører det Uendelige: Functionsgrændsen; det exacte Punktualitetsudtryk, hvorved det Endelige opløses i det Uendelige som i sit oprindelige Moment: Differentialet; den exacte Form, hvorunder den uendelige Discretions Elementer forenes til et inden mulige Grændser fuldendt Continuum, saa at det Endelige derved kan restitueres af det Uendelige: Integralet, ere da de Grundbegreber, Dialektiken i denne Sammenhæng har at belyse.

a) Functionsgrændsen: det Endeliges dialektiske Berøring med det Uendelige.

Den Grændse, hvortil en Function nærmer sig, idet dens Uafhængige enten voxer eller aftager i det Uendelige, bliver ved Reflexionen sat paa een Gang baade som vor-

dende og som værende, og kan forøvrigt være snart 0, snart ∞, snart endelig. Betegner man saaledes Grændsen for y i $f(x) = y$, naar $x = \infty$, ved $\text{Lim} f(x) = f(\infty)$, og, idet $x = 0$, ved $\lim f(x) = f(0)$; da indsees, at her til $f(x) = ax = y$ maa svare $\text{Lim} f(x) = \infty$ og $\lim f(x) = 0$, til $f(x) = \frac{a}{x} = y$, $\text{Lim} f(x) = 0$ og $\lim f(x) = \infty$, til $f(x) = \frac{x}{x} = y$ derimod $\text{Lim} f(x) = \lim f(x) = 1$. Hvorledes det gaaer til, at den exacte Handling ikke kan ændse det Dialektiske, uagtet den gjennemgaaende Tænkning med Nødvendighed maa opdage det Dialektiske, kan i nærværende Sammenhæng paavises. Har man t. Ex. $\text{Lim} f(x) = \text{Lim} \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \ldots + b_n x^n}$, og sætter uden videre $x = \infty$, faaer man i $\frac{a_0 + \infty + \infty \ldots}{b_0 + \infty + \infty \ldots} = \frac{\infty}{\infty}$ et aldeles ubestemt Resultat; ligeledes vil, dersom man i $\lim f(x) = \lim \frac{a_1 x + a_2 x^2 \ldots + a_n x^n}{b_1 x + b_2 x^2 \ldots + b_n x^n}$ uden al Forberedelse sætter $x = 0$, Resultatet: $\frac{0 + 0 + \ldots}{0 + 0 + \ldots} = \frac{0}{0}$ forblive ubestemt.

Hvor aldeles Bestemtheden er opløst, hvor svævende Grændsen er, sees i anførte Tilfælde deraf, at de vundne Resultater, skjøndt indbyrdes forskjellige, kunne omdannes til skuffende indbyrdes Lighed, nemlig $\text{Lim} f(x) = \frac{\infty}{\infty} = \frac{1}{\infty} \infty. = 0 \infty$, og $\lim f(x) = \frac{0}{0} = 0. \frac{1}{0} = 0. \infty$. Ved en forberedende Handling, en bestemt Reduction, kommer man derimod til en aldeles bestemt Grændse.

$$\text{Lim } f(x) = \text{Lim} \frac{\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} \ldots + a_n}{\frac{b_0}{x^n} + \frac{b_1}{x^{n-1}} \ldots + b_n} = \frac{a_n}{b_n} = c, \text{ og}$$

$$\lim f(x) = \frac{a_1 + a_2 x + \ldots a_n x^{n-1}}{b_1 + b_2 x + \ldots b_n x^{n-1}} = \frac{a_1}{b_1} = d,$$

som ikke kan forvandles til c. Sætter man, for at anføre endnu et Exempel, i Lim $\left(\frac{1}{x^x}\right)^{\frac{1}{x}}$ uden videre $x = \infty$, faaer man kun $\left(\frac{1}{\infty}\right)^{\frac{1}{\infty}} = 0^0$, som i dette Tilfælde er ubestemt; foretager man derimod først den fornødne Reduction erholder man Lim $\left(\frac{1}{x^x}\right)^{\frac{1}{x}}$ = Lim $\frac{1}{x} = 0$, som er en bestemt Grændse.

De exacte Handlinger følge altsaa paa hianden i en vis Orden: de ere, saa at sige, intellectuelle Foretagender, der udføres i Tiden: først skeer det Ene, derefter det Andet; først anvendes den ene Betragtningsmaade, derefter den anden; først behandler man x som endelig Størrelse, siden sættes den som ∞ eller som 0; først antager man Grændserne ∞ og 0 for uopnaaelige, sidenefter, naar man ved behørig Reduction af de endnu endelige Led har gjort Oprindelsens Lov kjendelig, betragter man Sagen, som om den for x i $f(x) = y$ uopnaaelige Grændse dog alligevel var opnaaet, og indseer saa, hvilken Indflydelse dette maa have paa y. Det er denne de exacte Handlingers Adskillelse i Tiden, der lader de modsatte Betragtningsmaader optræde ved Siden af hinanden, vexle med hinanden, falde ud fra hinanden, og saaledes forhindrer det Dialektiske fra at komme tilsyne.

I den gjennemgaaende Reflexion falder Tidsadskillelsen bort; den endelige Udstykning forsvinder i Begrebets Eenhed, de modsatte Bestemmelser gjennemskinne hinanden, og det Dialektiske viser sig. Ligningerne: $\text{Lim} f(x) = f(\infty) = c$, $\lim f(x) = f(0) = d$ udsige, naar de i Begrebet opfattes som logiske Domme, at det Uopnaaelige er opnaaeligt. Denne Modsigelse, der, løsreven fra sin Forudsætning, er

ligesaa utaalelig, som den Modsigelse at Firkanten er rund, har i sin væsentlige Sammenhæng den Betydning, at den sammentrænger to modsatte, hinanden udelukkende Bestemmelser i een Grundbestemmelse, ikke for at gjøre dem ligefrem til Eet, men for at vise deres fælleds Udspring. At Grændsen for x, og følgelig ogsaa Grændsen for $f(x)$ i $\mathrm{Lim} f(x) = f(\infty) = c$ er uopnaaelig, er jo netop begrundet i $f(x)$, som fordrer, at de utallige Mellemled, hvorved x som endelig Størrelse adskiller sig fra ∞ skulle gjennemløbes; men Ligningen selv, hvori der end ikke er Skygge af det Omtrentlige, angiver ved den exacte Værdi c tillige den opnaaede, altsaa dog opnaaelige Grændse. Den Forklaring, at Grændsen er naaet ved et Spring, idet man har sprunget utallige Mellemled over, er eensidig og vildledende; i Ligninger som: $\mathrm{Lim} f(x) = c$ og $\mathrm{lim} f(x) = d$, er, væsentlig seet, intet Mellemled oversprunget; den samme Lov, der i $\mathrm{Lim} f(x) = c$ gjælder for $x = \infty$, gjælder ogsaa for x som endelig, og den Lov, der i $\mathrm{lim} f(x) = d$ gjælder for x som endelig, gjælder i Consequensen ogsaa for $x = 0$. Sætningen: det Uopnaaelige er opnaaeligt, har sin Grund i Functionens Væsen; naar denne Begrundelse er indseet, forsvinder Modsigelsen, thi de contradictorisk modsatte Bestemmelser blive kun forenede for igjen at adskilles, og i endelig Adskillelse at udelukke hinanden.

I hvilken Betydning det Uopnaaelige udelukker Opnaaelsen, kan sees af de uendelige Rækkers Afbrydelse; i hvilken Betydning det Uopnaaelige dog bliver opnaaet, kan sees af disse Rækkers væsentlige Afslutning; hvor inderlig Begrændsningens modsatte Bestemmelser gjennemtrænge hinanden, kan endelig sees i de uendelige Størrelser.

α) Uendelige Rækkers Afbrydelse: Grændsen som uopnaaelig.

Da en uendelig Række ikke kan føres til Ende, maa den afbrydes; den Rest, som herved fremkommer, er en

ubekjendt Størrelse. Her møder altsaa den ovenfor berørte Vanskelighed, at man, for at kjende den fuldstændige Sum, forud maatte kjende Resten, og omvendt, for at kjende Resten, først maatte kjende den fuldstændige Sum. Denne Vanskelighed hæves, naar Leddenes Forhold under en endelig Fortsættelse viser, til hvilken Grændse den uendelige Fortsættelse vilde føre. Det er Forskjellen imellem convergente og divergente Rækker, som her afgiver det bestemte Udgangspunkt: „nærmer s_n, i Summen $s_n = u_0 + u_1 \ldots + u_n$, sig for n bestandig voxende, en bestemt endelig Grændse, siges Rækken selv at være convergent; er en Række ikke convergent, siges den at være divergent.“ Den exacte Opfattelse er nu i Korthed følgende:

„I enhver convergent Række er $\text{Lim}\, u_n = 0$, men dette er alene en nødvendig, ikke en tilstrækkelig Betingelse for Convergens, thi et uendeligt Antal af positive Led convergerende til 0 kan give en Sum $= \infty$. Derimod naar r_n betyder Summen af alle de efter u_n følgende Led u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+3}, ... i det Uendelige, hvilket kaldes Resten af Rækken, saa vil $\text{Lim}\, r_n = 0$ udtrykke baade en nødvendig og tilstrækkelig Betingelse for Rækkens Convergens, thi man kan da stedse gjøre n saa stor, at r_n er mindre end en hvilkensomhelst opgiven Størrelse, hvorved s_n bliver bragt ligesaa nær, som man vil, til en vis Grændse.“ [1]) Har man nu ved Anvendelse af dertil fundne Udtryk $\text{Lim} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ og $\text{Lim}\, n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} \div 1\right)$ forvisset sig om en Rækkes Convergens, da vil en Paaviisning af Convergensen igjen kunne føre til en nærmere Bestemmelse af Resten. Hvad Qvotienten $\frac{1}{1-x}$ angaaer, tilkjendegiver Udtrykket $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \begin{cases} x = -1 \\ x = +1 \end{cases}$ „at denne Form

---

[1]) Ramus. Algebra og Functionslære. S. 80.

tilfredsstiller Betingelsen $\lim r_n = 0$, naar x har en Værdi indesluttet imellem Grændserne: ± 1 exclusive. Giver nu $u_n = x^n$ som Rest $r_n = \frac{x^{n+1}}{1-x} = u_n \frac{x}{1-x}$, saa indsees, „at saasnart i en Række Leddene aftage saa stærkt, at $\frac{u_{n+1}}{u_n} < x$ for en vis Index n og for alle høiere, saa er ogsaa $r_n < u_n \frac{x}{1-x}$. „Dette", siger Ramus, „kan tjene til at bestemme den høiere Grændse for Feilen, som begaaes derved, at en uendelig Række afbrydes ved u_n."

I den exacte Analyse begaaer man altsaa en Feil ved at afbryde en uendelig Række; Index n kan i u_n være saa stor, man vil: saalænge n er endelig, medfører Afbrydelsen en Feil. Saaledes giver ovenstaaende Række for $x = \frac{1}{2}$, $r_n = u_n$, for $x = \frac{1}{3}$, $r_n = \frac{1}{2} u_n$ .... for $x = \frac{1}{p}$, $r_n = \frac{1}{p-1} u_n$. Er $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ikke constant, men „for en vis Index n og for alle høiere" stadig aftagende, vil Resten naturligviis blive endnu mindre. Man kan i slige Tilfælde bestemme Feilen, forsaavidt man kan bestemme Resten; men at her altid bliver en Rest, beviser, at Rækkens Afbrydelse altid giver en Feil. For Rækken: $e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \ldots$, t. Ex. har man nu vistnok beviist, baade hvad Summen angaaer, at $2 < e < 3$, og at Resten $r_n < \frac{1}{1.2.3....n.n}$, naar Rækken er afbrudt ved u_n; men man har da ogsaa med det Samme beviist Umuligheden af at undgaae en Feil, idet man nemlig har beviist, at hele Størrelsen og følgelig ogsaa Resten er incommensurabel med Eenheden. I dette Punkt er Modsætningen mellem Operations- og Reflexionsbegrebet ret paafaldende. Operationsbegrebet, der

er anlagt paa Beregning, tilfredsstilles exact derved, at Feilens Grændser bestemmes; Reflexionsbegrebet, der er anlagt paa logisk Indseen, fordrer en dialektisk Tilfredsstillelse. Forsaavidt den exacte Analyse maa indskrænke sig til at sætte Grændser for Feilen uden at kunne hæve Feilen, indrømmer den selv det Ufuldkomne, opgiver sin exacte Charakteer, og nøies med det Omtrentlige; men idet Analysen saa igjen angiver Forholdet imellem større og mindre Feil, bliver sig Feilen tydelig bevidst, og veed at sætte den saa snævre Grændser, det skal være, har den jo netop Feilen i sin Magt, og kan altsaa rette Feilen[1]); den exacte

---

[1]) Rækken for den Newtonske Binomialformel, $(a+x)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} x + \ldots.$, som, naar n er negativ eller bruden, bliver uendelig, er convergent, naar $\mathrm{Lim}\, \frac{A_{r+1}}{A_r} x = \mathrm{Lim} \left(\frac{n-r}{r+1}\right) \frac{x}{a} = \frac{x}{a} < 1$, altsaa, naar $a > x > -a$. Benyttes Rækken til „approximeret Beregning, idet man f. Ex. tager Summen af p Led, bliver Resten af Rækken eller Feilen, der begaaes, udtrykt ved:

$$r_p = A_p a^{n-p} x^p \left\{1 + \frac{n-p}{p+1} \frac{x}{a} + \frac{(n-p)(n-p-1)}{(p+1)(p+2)} \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \ldots\right\}$$

$$< A_p a^{n-p} x^p \left(1 + \frac{x}{a} + \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \ldots\right) = A_p a^{n-p+1} \frac{x^p}{a-x}$$

$$\left(= A_p a^{n-p} x^p \frac{a}{a-x}\right)$$

„idet man blot iagttager, at $n-p < p+1$ eller $n-1 < 2p$, hvilket altid kan opnaaes ved at fortsætte Rækken langt nok." A. Steen. Reen Mathm. S. 307—308.

„En nødvendig Forberedelse for de reelle Rødders approximerede Beregning i numeriske Ligninger eller deres *Udskillelse* d. e. Bestemmelsen af de forskjellige Intervaller, hvori de ere enkelt beliggende. Er $f(x) = 0$ en Ligning med blot ulige Rødder, vil Udskillelsen kunne opnaaes ved i $f(x)$ at substituere for x de forskjellige mellem de yderste Grændser beliggende reelle Størrelser, som ere Led i en arithmetisk Række, hvis Differens er mindre end hvilkensomhelst to Rødders Differens i $f(x) = 0$.. (Ramus. Algebra og Functionslære. S. 129.)

Analyse befinder sig saaledes, naar den sees fra Reflexionens Synspunkt, i det dialektiske Tilfælde, at den ved at afbryde de uendelige Rækker begaaer Feil uden at tage feil, at den feiler uden at feile.

Haves altsaa i Ligningen $f(x)=0$ (I) en Rod fuldstændig udskilt t. Ex. imellem a_0 og a_0+1, da maa Ligningen tilfredsstilles ved $x=a_0+\frac{1}{x_1}$ (α). Indsættes denne Værdi i (I), faaes idetmindste $f_1(x_1)=0$ (II); heri maa være en reel Rod >1, men ogsaa kun een, da vi jo gik ud fra, at der imellem a_0 og a_0+1 var en Rod fuldstændig udskilt: x_1 kan med andre Ord, kun have een Værdi >1. Udskilles nu denne Rod fuldstændig, finde vi den beliggende mellem a_1 og a_1+1, d. e. $a_1<x_1<a_1+1$, saa at $x_1=a_1+\frac{1}{x_2}$ (β). Indsættes (β) i (α), faaer man: $x_0=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{x_2}}$ (γ). Indsættes Udtrykket (β) i (II), faaes $f_2(x_2)=0$ (III), som ligeledes kun har een reel Rod, der antages fuldstændig udskilt mellem a_2 og a_2+1, saa at $a_2<x_2<a_2+1$, og $x_2=a_2+\frac{1}{x_3}$. Ved at indsætte det sidste Udtryk i (γ) erholder man $x=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{x_3}}}$ osv. Her danner sig altsaa, som man seer, en Kjædebrøk, der kan fortsættes i det Uendelige; saaledes haves $\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\dots}}$

Afbryder man nu en saadan Kjædebrøk, og antager to paa hinanden følgende Convergenter til den ved Tilnærmelsen søgte Størrelse x at være $\frac{y_{r-1}}{z_{r-1}}$ og $\frac{y_r}{z_r}$, da haves $\frac{y_{r-1}}{z_{r-1}} \gtrless x \gtrless \frac{y_r}{z_r}$. Man begaaer nu unegtelig en Feil, hvor man saa end afbryder den uendelige Kjedebrøk, men den Feil man begaaer, ved t. Ex. at tage $\frac{y_{r-1}}{z_{r-1}}$ for x, er i numerisk Værdi mindre end $\frac{y_r}{z_r}-\frac{y_{r-1}}{z_{r-1}} = \frac{1}{z_{r-1}\,z_r}$, og forsaavidt nøiagtig bestemt. (Jvfr. Ramus. Elementær Algebra, S. 103—112. og Algebr. Functionsl. S. 25—35).

β) Rækkernes væsentlige Afslutning: Grændsen som opnaaelig.

At det ved en uendelig Rækkes væsentlige Afslutning kommer an paa Indseen og Begriben er ligesaa uimodsigeligt, som at det Punktlighedsbegreb, hvorom det her gjælder, er forskjelligt fra et hvilketsomhelst almeenlogisk Begreb. Betegnelser som: u_n, det nte Led, $\text{Lim}\,\frac{u_{n+1}}{u_n}$, $\text{Lim}\; r_n$ o. desl. ere, væsentlig forstaaet, mere end vedtagne Beregningsudtryk; de ere Tankehandlingens prægede Former, Operationskategorier, hvori det Endelige paa en saa eiendommelig Maade gjennemskinnes af det Uendelige, at det Endeløses Vidtløftighed hæves, og Rækken kommer til Afslutning. Hvorledes det nte Led i Begrebets Almindelighed afspeiler de forestillede Enkeltleds uendelige Vrimmel, er ved Bestemmelsen af Forholdet mellem Operationen og den objective Reflexion allerede fremhævet. For at fatte det Væsentlige i en uendelig Rækkes Afslutning vil det imidlertid her være nødvendigt at betragte Forholdet imellem Operations- og Reflexionsbegrebet lidt nærmere.

Til Bedømmelse af en Rækkes Convergens opstilles, som bekjendt, den Læresætning, at Rækken er convergent, naar $\text{Lim}\,\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, og derimod divergent, naar $\text{Lim}\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$. Ihvorvel man nu vistnok kan besidde en vis Færdighed i at bruge de opstillede Formler, og forsaavidt have de deri udtrykte Operationsbegreber, uden endnu at gjennemskue Sagens Væsen, saa ligger dog Reflexionsbegrebet i nærværende Tilfælde saa nær, at det under fortsat Udøvelse af Operationen omsider maa komme som af sig selv. At nemlig en Række, hvis Led saaledes voxe, at $\text{Lim}\,\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, maa divergere, er iøinefaldende; heller ikke kan den Forstaaelse ligge fjernt, at en Række, hvis Led aftage saaledes, at

$\mathrm{Lim}\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, maa convergere. I hvilken Grad Operationskategorierne bidrage til at klare den objective Reflexion, kan her sees ved en Sammenstilling af saadanne Rækker som: $1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots$ og $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ Da Leddene i begge disse Rækker ere aftagende, skulde man ved første Blik formode, at begge maatte være convergente, den sidste ligesaavel som den første. Ved Operationens Formler oplyses vi imidlertid ikke blot om det Modsatte, men vi ledes tillige til at indsee Grunden. Betragte vi de almindelige Led $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ og $\frac{1}{n}$ lidt nøiere, overbevises vi om, at $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ maa, naar n er overordentlig stor, være i Forhold til $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ganske anderledes forsvindende, end $\frac{1}{n+1}$ i Forhold til $\frac{1}{n}$. I Rækken $1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \dots$ staaer altsaa Formindskelsen af hvert følgende Led i et saadant Forhold til Formerelsen af Leddenes Antal, at det Første i det Uendelige ophæver det Sidste, og den hele Sum falder indenfor endelige Grændser. I Rækken: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots + \frac{1}{n} \dots$ bliver derimod Formindskelsen af hvert følgende Led desto ubetydeligere, jo mere Leddenes Antal voxer; hvor stor n end bliver, vil r_n paa disse Vilkaar ved sine utallige Led bestandig kunne give en Sum $= \infty$, og Rækken altsaa være divergent. Det bliver da paa denne Maade indlysende, at en Række, hvori $\mathrm{Lim}\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, kan, saaledes som i det givne Exempel, divergere, medens en Række, hvori $\mathrm{Lim}\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ maa, ifølge Sagens Natur

være convergent. Her kan i strengeste Forstand være Tale om Indseen og Begriben.

En saa fuldstændig Congruens af Reflexion med Operation finder derimod ikke Sted, hvad Udtrykket: $\text{Lim}\, n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) > 1$ angaaer. En Række, hvori Leddene forholde sig saaledes, at $\text{Lim}\,\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, kan, som vi have seet, være divergent, men den kan paa given Betingelse ogsaa være convergent. Naar da en saadan Rækkes Convergens skal undersøges, vælger man til Norm en anden Række, hvis Convergens særlig lader sig paavise, uafhængig af almindelige Theorier, og hvori t. Ex. $\text{Lim}\,\frac{t_{n+1}}{t_n} = 1$, idet t_n er det almindelige Led. En saadan Rækkes nte Led være nu: $\frac{1.2.3\ldots m}{a(a+1)\ldots(a+m-1)} \cdot \frac{a-1}{a+m}$ $= \left(\frac{1.2.3\ldots m}{a(a+1)\ldots(a+m-1)} - \frac{1.2.3\ldots(m+1)}{a(a+1)\ldots(a+m)}\right)$; sættes heri m efterhaanden $= 1, 2, 3 \ldots n$, faaer man Rækkens Sum udtrykt, paa den ene Side ved de enkelte Led, paa den anden Side ved en Reduction, nemlig:

$$\frac{a-1}{a}\left(\frac{1}{a+1} + \frac{1.2}{(a+1)(a+2)} \ldots + \frac{1.2.3\ldots n}{(a+1)\ldots(a+n)} + \ldots\right)$$

$= \frac{1}{a} - \frac{1.2.3\ldots(n+1)}{a(a+1)\ldots(a+n)}$; ved at sammenligne Summer med flere og flere Led overbeviser man sig om, at Rækken er convergent, for $a > 1$, og hele Summen en ægte Brøk. I denne Række haves da $\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{n+1}{a+n+1}$, $\frac{t_n}{t_{n+1}}$ $= \frac{a}{n+1} + 1$, og altsaa, i Overeensstemmelse med den opstillede Fordring, $\text{Lim}\,\frac{t_{n+1}}{t_n} = 1$. Naar nu $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ i en

Række, hvis almindelige Led er u_n, er større end, eller lig med $\frac{t_n}{t_{n+1}} = \frac{a}{n+1} + 1$ (hvori $a > 1$), da er u-Rækken convergent, idet t-Rækken er det. Denne Convergens-betingelse udtrykkes ved $\frac{u_n}{u_{n+1}} \geqq \frac{a}{n+1} + 1$; altsaa: $\text{Lim}\ n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) + \text{Lim}\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \geqq a$, eller $\text{Lim}\, n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \geqq a$. Da her angaaende a kun fordres $a > 1$, kan Udtrykket $\text{Lim}\ n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) > 1$ i fuldstændig Almindelighed angive Betingelsen for Convergens i det omspurgte Tilfælde. Hermed er Operationsbegrebet væsentlig afsluttet; forsøger Reflexionen at gaae videre, viser sig en Skranke. Af $\frac{t_n}{t_{n+1}} = \frac{a}{n+1} + 1$ kan $\text{Lim}\ n\left(\frac{t_n}{t_{n+1}} - 1\right)$ unegtelig meget let afledes, og naar dette Udtryk er fundet, falder dets Anvendelse paa u-Rækken, ifølge ovenstaaende Sammenligning, som af sig selv; men opkaster man saa det Spørgsmaal, hvorledes det egentlig er begrundet i $\frac{t_n}{t_{n+1}}$, at $\text{Lim}\, n\left(\frac{t_n}{t_{n+1}} - 1\right)$ maa give $a > 1$, for at Rækken kan være convergent, vil den Opererende, der kun ad særlig praktisk Vei seer sig istand til at godtgjøre t-Rækkens Convergens, uden Tvivl indskrænke sig til at pege paa den omhandlede Formel, og svare: „jeg kan bevise det, men jeg kan ikke begribe det.“ [1])

---

[1]) Hvorvidt den her antydede Vanskelighed er for Mathematiken selv uovervindelig eller ikke, lades i denne Sammenhæng uafgjort; kun dette maa udtrykkelig fremhæves, at den synthetiske Methode just hævder sin afsluttende Selvstændighed ved Udelukkelse af den analytiske i saadanne Tilfælde, hvor Beviisførelsen

Ifølge Reflexionsbegrebet bliver den uendelige Række væsentlig afsluttet derved, at Uendelighedsgrændsen paa alle Punkter viser sig at berøre det Endelige. I Ligninger som: $\frac{1}{1-x} = \Sigma x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$, $e = 1 + \Sigma \frac{1}{1.2.3\ldots.n} + r_n$, idet $r_n < \frac{1}{1.2.3\ldots nn}$, o. s. v., er det med Hensyn paa Sagens Væsen ligegyldigt, om her i Summerne anføres to Led, eller Myriader af Led. Uendelighedsgrændsen er med alt dette lige fjern og lige nær, lige uopnaaelig, lige opnaaelig. Dersom Sagen ikke forholdt sig saaledes, vilde en uendelig Række vel kunne afbrydes, men aldrig afsluttes. Sætter man t. Ex. i Rækken: $1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$, $n = \infty$, maa jo ikke alene x^{n+1} og x^n, men tillige $x^{n-1}, x^{n-2}, x^{n-3}\ldots$ forvandles til x^∞; det Uendelige vilde da paa denne Maade udøve en saa uhyre Tilbagevirkning, at Rækken med Myriader af forskjellige Led tilsidst kun fik Led af en eneste Form, nemlig $x^{\infty-\infty}$; og hvad er saa $x^{\infty-\infty}$? Af $\frac{1}{1-x}$ faaes, for $x = \frac{3}{2}$, Rækken: $1 + \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \ldots\ldots + \left(\frac{3}{2}\right)^n + \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{2}}$; sættes nu $n = \infty$, bliver jo $\left(\frac{3}{2}\right)^n = \infty$, $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} = \infty$, $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} = \infty$ o: s. v., hele Summen indtil $\left(\frac{3}{2}\right)^n$ inclusive $= \infty$, Resten $\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{2}} = -\infty$; hvad

---

ikke kan hæves til Begrebsudvikling, og at den forsaavidt, istedetfor at betegne det Fuldkomnere, tvertimod beroer paa en Ufuldkommenhed.

betyder dette? Af $\frac{1}{1-x}$ faaes, for $x = \frac{1}{2}$, Rækken $1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$; sættes heri $n = \infty$, bliver ikke alene $\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 0$ og $\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, men $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$ .... i det Uendelige $= 0$; hvad er da 0, hvad er ∞?

γ) Uendelige Størrelser: Begrændsningens Dialektik.

Ved skarp Adskillelse af Størrelsen selv og dens Grændse kunne Betegnelserne 0 og ∞ fastholdes, ikke som Størrelser, men som Størrelsesgrændser saaledes, at 0 udelukker og ∞ opsluger enhver mulig Størrelse. I et Udtryk som $\frac{a}{0} = \infty$ betyder da 0 ikke, at her er, men at her har været en Divisor, som nu er forsvunden; heller ikke kan ∞ betragtes som en egentlig Qvotient, men som Tegn paa en i det Uendelige opløst Qvotient, en Qvotient, der ophørte at være en Størrelse just i det Øieblik, da den tilsvarende Divisor indsvandt til Intet. Men idet 0 og ∞ paa denne Maade opfattes som skarpe Negationer, som rene Grændser, bliver Grændsebegrebet selv eensidig opfattet; Grændsen er nemlig ifølge sit Begreb ikke blot negativ, men ogsaa positiv: det Negative er Grændse derved, at det Positive er det. Det er nemlig ikke blot 0 og ∞, der ere Grændser; Størrelser som $+1$ og -1 ere jo ogsaa Grændser, hine negative, disse positive og negative. En Størrelse, der falder imellem Grændserne 0 og ∞ vil altsaa, ifølge den angivne Synsmaade, være tilintetgjort, naar den har naaet

en af disse Grændser; men en Størrelse, der falder imellem Grændserne $+1$ og -1, vil netop ved at opnaae en af disse Grændser vise sig som en bestemt tilværende Størrelse, thi -1 er dog vel ligesaafuldt en Størrelse, som $+1$. Imellem Grændserne $+1$ og -1 er 0 den Grændse, hvori $+$ og $-$ berøre hinanden; at fastholde Adskillelsen af to Slags Grændser, negative og positive, er altsaa umuligt, efterdi det just er det Positive, som i Grændsen selv grændser op til det Negative. Men er det umuligt at adskille det i Grændsen Negative fra sit Positive, da er det ogsaa umuligt at holde Størrelsens Grændse endelig adskilt fra Størrelsen selv.

I Erkjendelsen af, at en Størrelses Grændse nødvendig hører med til at bestemme den som Størrelse, kunde man dog, uden endnu at opfatte 0 og ∞ som Størrelser, prøve paa at gaae et lille Skridt videre, og opfatte dem som Størrelsers Overgange.[1] Idet her da handles om forskjellige Functioner af 0, om $\sin 0$, $\cos 0$, $\operatorname{tg} 0$ o. s. v., er Meningen ikke, at 0 i sig selv er Noget, heller ikke, at 0 er slet Intet, thi 0 er en Overgang, men er 0 i $\operatorname{tg} 0$ en Overgang, saa er ∞ i $\cot 0 = \infty$ jo ogsaa en Overgang.

---

[1]) „Da intet Tal opløftet til 0te Potens frembringer a, kan $\sqrt[0]{a}$ ikke angives ved nogen tidligere bekjendt Størrelse. Roden kan ikke være rational, forbi ethvert Potenstal af 0te Grad er 1, og den kan heller ikke være irrational, forbi intet Tal kan være indbefattet mellem to paa hinanden følgende Potenstal af nte Grad. Men $\sqrt[0]{a}$ kan bestemmes ved Anvendelse af Ligningen $\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}$, idet man sætter $q = 0$, $p = 1$, som giver $\sqrt[0]{a} = a^{\frac{1}{0}} = a^{\infty}$, som enten er 0 eller ∞, eftersom $a < 1$ eller $a > 1$. Man seer heraf, at 0 og ∞ henhøre hverken til de rationale eller til de irrationale Størrelser; tilmed ere de jo egentlig slet ikke Størrelser, men angive blot Størrelsens Ophør, dens Overgangsformer." A. Steen. Reen Mathem. Kbhvn 1856. S. 115—116.

Da nu en Overgang, hvad Modsætningen af Positivt og Negativt angaaer, kun faaer Betydning derved, at det Positive gaaer over i det Negative, og omvendt det Negative i det Positive, altsaa derved, at det Positive og det Negative begge ere i Overgangen, og desaarsag høre med i Overgangens Begreb: saa burde saadanne Ligninger, som: $\sin 0 = 0$, $\cot 0 = \infty$, strengt taget, skrives: $\sin(\pm 0) = \pm 0$, $\cot(\pm 0) = \pm\infty$, o. s. v. Ved denne Adskillelse af $+$ og $-$ i 0 og ∞ opkommer der i disse Grændsebetegnelser selv en indre Forskjellighed, der er i høieste Grad dialektisk. Betegnelsen ± 0 udtrykker jo, naar vi see nærmere til, at det ene Nul har skilt sig ad i tre forskjellige Nuller, et $+0$, et -0, og det rene, neutrale 0, den skarpe Negation af $+$ og $\div$; den samme Adskillelse gjentager sig, hvad $\pm\infty$ angaaer; ogsaa her er et $+\infty$, et $-\infty$, og et neutralt ∞, hvori $+$ og $-$ ere forsvundne. Naar det altsaa hedder, at 0 og ∞ ere Overgangsbetegnelser, kan det ikke gjælde om det rene 0 eller det neutrale ∞, men kun om ± 0 og $\pm\infty$.

Den Maade, hvorpaa de saakaldte ubestemte Former: $\frac{0}{0}$, $0.\infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, 0^0, ∞^0 og 1^∞, behandles i Mathematiken, viser tydelig nok, hvad Overgangsformer ville sige. Disse Former, som, idet de ere Functionsgrændser, altsaa ikke umiddelbare Grændser, men i sig reflecterede Grændsebestemmelser, kunne tænkes fremkomne derved, at x i $f(x)$ sættes $= a$, og da bestemmes ifølge Grundligningen $f(a) = \lim f(a+h)$, dele sig jo væsentlig i to Grupper, af hvilke den første: $\frac{0}{0}$, $0.\infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ og $\infty - \infty$ gaaer ind under Formlen: $\frac{\Phi(a)}{\Psi(a)} = \frac{0}{0}$, paa Betingelse af $\Phi(a) = 0$, og $\Psi(a) = 0$; den anden: 0^0, ∞^0 og 1^∞ paa samme Betingelse under Formlen $\Phi(a)^{\Psi(a)}$.

Hvorledes de under første Gruppe hørende Former lade sig bestemme, sees af følgende Rækker: $\frac{\Phi(a+h)}{\Psi(a+h)}$

$$= \frac{A_0 h^{\alpha_0} + A_1 h^{\alpha_1} + ..}{B_0 h^{\beta_0} + B_1 h^{\beta_1} + ..} = \frac{A_0}{B_0} h^{\alpha_0 - \beta_0} \frac{1 + \frac{A_1}{A_0} h^{\alpha_1 - \alpha_0} + ...}{1 + \frac{B_1}{B_0} h^{\beta_1 - \beta_0} + ...},$$

hvor Leddene, vel at mærke, ere ordnede efter stigende Potenser af h, saaledes, at α_0 er den mindste Exponent i øverste, β_0 den mindste Exponent i nederste Række. Eftersom nu $\alpha_0 - \beta_0 \gtreqless 0$, faaer man $\frac{\Phi(a)}{\Psi(a)} = \frac{0}{0} = \begin{cases} 0 \\ \frac{A_0}{B_0} \\ \infty \end{cases}$.

Hvad den anden Gruppe angaaer, kommer det væsentlig an paa at bestemme $\lim \Psi(a+h) \, l. \, \Phi(a+h)$, idet $\Phi(a)^{\Psi(a)} = \lim \Phi(a+h)^{\Psi(a+h)} = e^{\lim \Psi(a+h) \, l \, \Phi(a+h)}$. Udvikles denne Exponent i Rækken: $(B_0 h^{\beta_0} + B_1 h^{\beta_1} + \ldots) \, l. \, A_0 h^{\alpha_0} + A_1 h^{\alpha_1} + \ldots)$, vil det efter behørig Transformation sees, at saavel 0^0 som ∞^0, altid

---

[1]) Formerne: ∞^0 og 0^0 bestemmes nemlig saaledes: $\Phi(x)^{\Psi(x)} = e^{\Psi(x) \, l \Phi(x)}$, thi $e^{l. \Phi(x)} = \Phi(x)$, $\Phi(a)^{\Psi(a)} = \lim \Phi(a+h)^{\Psi(a+h)} = \lim e^{\Psi(a+h) \, l(\Phi(a+h)} = e^{\lim \Psi(a+h) \, l. \Phi(a+h)}$; det kommer altsaa an paa at bestemme $\Psi(a+h) l \Phi(a+h)$. $\Psi(a+h) \, l \, \Phi(a+h) = (B_0 h^{\beta_0} + B_1 h^{\beta_1} + \ldots..) \; l. \; (A_0 h^{\alpha_0} + A_1 h^{\alpha_1} + \ldots..) = (B_0 h^{\beta_0} + B_1 h^{\beta_1} + \ldots). \; (l. \, A_0 h^{\alpha_0} + l \, (1 + \frac{A_1}{A_0} h^{\alpha_1 - \alpha_0} + \ldots..)$ $= (B_0 h^{\beta_0} + B_1 h^{\beta_1} + ..) \, l. A_0 \, (I) + \alpha_0 (B_0 h^{\beta_0} + B_1 h^{\beta_1} + \ldots) \; l. \, h \, (II)$ $+ (B_0 h^{\beta_0} + B_1 h^{\beta_1} + \ldots) \left(\frac{\frac{A_1}{A_0} h^{\alpha_1 - \alpha_0} + ..}{1} - \ldots \right) (III)$.

Da $\Psi(a) = 0$, sees, at alle β ere positive, følgelig $\lim (I) = 0$; da $\lim x^n \, l \, x = 0$, er $\lim (II) = 0$; da endelig β_0 er positiv og $\alpha_r - \alpha_0$ positiv, idet Rækken er ordnet efter stigende Potenser (altsaa: $\alpha_1 > \alpha_0$), saa kommer (III) til at indeholde lutter positive Exponenter af h, altsaa: $\lim (III) = 0$. Saaledes har man

have den bestemte Værdi 1, naar blot, ifølge Forudsætningen, ovenstaaende Rækkeudvikling af $\Phi(a+h)$ og $\Psi(a+h)$ er mulig, og at 1^{∞} maa, eftersom $\alpha_1 + \beta_0 \gtreqless 0$ give $\Psi(a)\, l\, \Phi(a) = \begin{cases} 0 \\ A_1 B_0; \\ \infty \end{cases}$ altsaa: $\varphi(a)^{\Psi(a)} = 1^{\infty} = \begin{cases} e^0 = 1 \\ e^{A_1 B_0} \\ e^{\infty} = \infty \end{cases}$ [1].

---

da: $\Phi(a)^{\Psi(a)} = e^{\lim \Psi(a+h)\, l(\Phi(a+h))} = e^0 = 1$. Exempel: $f(x) = (1+x)^{1+x^2}$ give, for $x = -1$, 0^0; altsaa: $f(-1+h) = e^{(2h-h^2)\, l.h} = e^{2h\, lh - h^2 l.h}$, og $f(-1) = e^0 = 1$. Det kunde altsaa synes, som om 0^0 og ∞^0 aldeles ikke vare ubestemte Former; dette vilde de heller ikke være, dersom $\Phi(a+h)$ og $\Psi(a+h)$ altid lode sig udvikle i Række efter stigende Potenser af h. Men der gives, som bekjendt, enkelte Tilfælde, hvor en Rækkeudvikling er umulig, og hvori man altsaa ved særegne Bestemmelser kan for 0^0 eller for ∞^0 erholde en anden Værdi end 1. Saaledes giver $\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^x}\right)^{\frac{1}{x}}$, for $x = \infty$, ∞^0; men $\text{Lim}\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^x}\right)^{\frac{1}{x}}$
$= \frac{1}{\text{Lim}\left(\left(\frac{1}{x}\right)^x\right)^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{\text{Lim}\,\frac{1}{x}} = \infty$.

[1] Exempler: 1) $\left(1 + \left(\frac{x}{a}\right)^3\right)^{\frac{a}{x}} = f(x)$ giver, for $x = 0$, 1^{∞}; $f(0+h) = e^{\frac{a}{h} l\left(1+\left(\frac{h}{a}\right)^3\right)} = e^{\frac{a}{h}\left(\frac{h^3}{a^3} - \frac{h^6}{2a^6} \cdots\cdots\right)} = e^{\frac{h^2}{a^2} - \frac{h^5}{2a^5} \cdots}$, og $\lim f(0+h) = e^0 = 1$. 2) $f(x) = (2-x)^{\frac{1}{1-x}}$, som, for $x=1$, giver 1^{∞}. Sættes $1+h$ istedetfor x, haves $f(1+h) = (1-h)^{-\frac{1}{h}} = e^{-h^{-1} l.(1-h)} = e^{h^{-1}\left(\frac{h}{1} + \frac{h^2}{2} \cdots\right)} = e^{1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{3} + \cdots}$; $f(1) = \lim f(1+h) = e$. 3) $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x^2}} = 1^{\infty}$, for $x = 0$. $f(0+h) = e^{\frac{1}{h^2} l(1+h)} = e^{h^{-2}\left(\frac{h}{1} - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} \cdots\right)} = e^{h^{-1} - \frac{1}{2} + \frac{h}{3}, \cdots}$ og $\lim f(0+h) = f(0) = \infty$.

Da Functionsgrændsen, idet den viser det Endeliges Overgang i det Uendelige, og i Forsvundetheden endnu afspeiler det Forsvundne, ligesaa meget er i Vorden som i Væren, spiller Tilvæxten h den egentlige Hovedrolle: det kommer i $f(a) = \lim f(a \pm h) = f(a \pm 0)$, saa at sige, an paa Bevægelsen i h's Gjennemgang gjennem 0. Et Par Exempler kunne oplyse Sagen: $f(x) = \left(\frac{1}{a-x}\right) : \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ giver, for $a = x$, Formen $\frac{\infty}{\infty}$, og da saaledes $f(a+h) = -\sqrt{\frac{2a}{h} + 1}$, bliver $f(a) = \lim f(a+h) = \infty$, altsaa i dette Tilfælde $\frac{\infty}{\infty} = \infty$. Haves derimod $f(x) = \frac{tg\,x}{\sec x}$, saa bliver, for $x = \frac{\pi}{2}$, $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x} : \frac{1}{\cos x} = \sin x = 1$, og følgelig $\frac{\infty}{\infty} = 1$. Haves $f(x) = (a-x)\, l^{\frac{1}{a-x}}$, som for $x = a$, giver Formen $0.\infty$, saa bliver $f(a+h) = -he^{-\frac{1}{h}}$, og $f(a) = \lim f(a+h) = 0$; altsaa $0.\infty = 0$, er derimod $f(x) = \sin x . \cot x$, som, for $x = 0$, ligeledes giver os Formen $0.\infty$, saa er $f(0) = \lim f(0+h) = \lim \sin(0+h) \frac{\cos(0+h)}{\sin(0+h)} = \lim \cos h = 1$, altsaa $0.\infty = 1$. Er, for ogsaa at anføre denne tredie Mulighed $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}(1-x)$, som, for $x = 1$, ligeledes giver Formen $0.\infty$, erholder man ved Reduction $\frac{(1-x)^2}{(1-x)^2(1-x)} = \frac{1}{1-x}$, og følgelig $0.\infty = \infty$.

Her er altsaa i $f(a) = \lim f(a \pm h) = f(a \pm 0)$, hvilken af de særskilte Former man end vælger, og hvorledes end Betingelserne ændres, i den ene Grændse tre Grændser, hvorpaa det væsentlig kommer an. Forsaavidt $h > 0$, ligger

her imellem det endelige positive h og $+0$, paa den ene, og imellem det endelige negative h og -0 paa den anden Side en Størrelse, som saavel fra positiv som fra negativ Side er i lige Grad endelig og uendelig, efterdi det er den mindst mulige endelige Størrelse. Det Positive i $+0$ betegner altsaa hverken 0 eller en positiv Størrelse, men Grændsen imellem den positive Størrelse og dens Negation, 0; ligeledes betegner det Negative i -0 Grændsen imellem den negative Størrelse og dens Negation. Er nu t. Ex. i $\lim f(0 \pm h) = \lim \cot(0 \pm h) = f(0 \pm 0) = \pm \infty$ paa begge Sider af 0 en dialektisk Overgangsstørrelse, en Størrelse, der er uendelig-endelig, efterdi den som den mindst mulige endelige Størrelse er uendelig lille; da er her ogsaa paa begge Sider af ∞ en dialektisk Overgangsstørrelse, en Størrelse, der er endelig-uendelig, efterdi den, som den størst mulige endelige Størrelse, er uendelig stor. Paa denne Maade bliver enhver Størrelsesovergang forvandlet til en dialektisk Overgangsstørrelse: uendelig i sin mindst mulige Endelighed er Overgangsstørrelsen et Differential; uendelig i sin størst mulige Endelighed er Overgangsstørrelsen, forsaavidt den opfattes som en Differentialernes Sum, et Integral.

b) Differentialet: Momentets Dialektik.

„Førend vi gaae videre, vil det være hensigtsmæssigt nærmere at bestemme Begrebet om uendelig smaae Størrelser. En uendelig lille eller forsvindende Størrelse er den, der er mindre end enhver nok saa liden Størrelse af samme Slags. En saadan Størrelse er ikke Nul (Intet), thi da var den ingen Størrelse, men i Sammenligning med en endelig Størrelse bliver den at regne for Nul; thi ellers var den ikke mindre end enhver angivelig Størrelse. Er altsaa a en endelig Størrelse og α en uendelig lille, saa er $a \pm \alpha = a$, $a\alpha = 0$. Enhver uafbrudt Bevægelse giver Exempel paa uendelig smaae Størrelser, idet den tilbagelagte Vei hvert Øieblik voxer med en saadan

Størrelse. Forholdet imellem to uendelig smaae Størrelser α og β kan være endeligt, og da siges de at være af samme Orden. Er α en uendelig lille Størrelse, saa vil α^2 være uendelig mindre og forsvindende i Sammenligning med α. α^2 og enhver Størrelse, hvis Forhold til denne er endeligt, siges at være uendelig lille af anden Orden, idet man tænker sig α at være af første Orden. Ligeledes siges α^3 og enhver Størrelse, hvis Forhold til denne er endeligt, at være uendelig lille af tredie Orden, og saa fremdeles".

„Er a en endelig Størrelse, saa siges $\frac{a}{\alpha}$ og enhver Størrelse, hvis Forhold til denne er endeligt, at være en uendelig stor Størrelse, $\frac{a}{\alpha^2}$ at være uendelig stor af anden Orden o. s. v. Det forstaaer sig, at man ogsaa kan tænke sig saavel uendelig smaae som uendelig store Størrelser af Ordener, hvis Exponenter ikke ere hele Tal. En uendelig stor Størrelse er ikke det Samme som det, der angives ved Tegnet $\frac{a}{0}$ eller ∞, hvilket man kunde kalde det absolut Uendelige, den Grændse, der ligger udenfor al Storhed. Man skriver imidlertid ofte 0 og ∞, hvor der egentlig menes en uendelig lille og en uendelig stor Størrelse." [1])

For at overbevise sig om, at her ved Antagelse af uendelige Størrelser ikke indsmugles uholdbare Begreber, lægge man Mærke til, at enhver Storhedsbestemmelse væsentlig er en Forholdsbestemmelse, og at en Forholdsbestemmelse kan være constant, uagtet Leddene tiltage eller aftage i det Uendelige. Kun i Læren om de uendelige Størrelser kan Størrelsesbegrebet fuldstændig udvikles, thi kun i denne Lære bliver det tilstrækkeligt klart, at Størrelsen er Forhold og Forholdet Størrelse. I Differentialcoifficienten gaaer Størrelsen op i det betegnende Forhold som Forholds-

---

[1]) Chr. Jürgensen. Begyndelsesgruudene af den mathematiske Analyse og dens Anvendelser. Kbhvn 1855. S. 41—43.

størrelse; Differentialcoifficenternes forskjellige Orden beroer paa et System af Forholdsstørrelser, og Differentiationsprinciperne angive den ved de eiendommelige Forholdsconseqvenser bestemte Methode.

α) Differential- og Differentialcoefficient: Forholdsstørrelse.

En almindelig Storhed, en almindelig Lidenhed er endnu ingen Størrelse; først, naar Storheden og Lidenheden nærmere bestemmes, fremkommer Størrelsen. Da nu umiddelbar Bestemthed falder sammen med Begrændsning, og det umiddelbart Begrændsede er et Endeligt, saa ligger den Opfattelse nær, at kun den begrændsede, det vil sige, endelige Størrelse er i egentlig Forstand Størrelse. Som endelig Størrelse kan Størrelsen fastholdes i Forestillingen og bestemmes for Anskuelsen; ligesom, hvad benævnte Tal angaaer, en Alen kan bestemmes for Anskuelsen deels umiddelbart, deels ved Sammenligning med et Qvarteer, saaledes kunne Talrækkens endelige Tal opfattes deels umiddelbart, deels ved Sammenligning med hverandre indbyrdes; hvert Tal har da i denne sin Endelighed et eget Navn, et egen Betegnelse, og kan forsaavidt optræde som et for sig tilværende Hele. Idet nu de saaledes opfattede Størrelser indgaae i Forbindelser med hverandre, viser det sig, at, jo mere den endelige Forestilling har Overvægt over Tænkningen, desto mere Eftertryk falder der paa de givne Tal, de tilværende Forholdsled; først efterhaanden som den begribende Tænkning faaer Magt med den umiddelbare Forestilling, forvandles Leddene til Momenter, saa at Eftertrykket tilsidst kommer til at hvile, ikke paa de umiddelbare Led, men paa Forholdet. I Udtryk som: $1, \frac{2}{2}, \frac{a}{a}, \mathrm{Lim}\frac{x}{x}$ og $\lim \frac{x}{x}$ bliver Eenheden at see fra væsentlig forskjellige Synspunkter.

Saalænge Forestillingen uvilkaarlig hæfter ved Tegnet: 1, tager det sig ud, som var Eenheden et umiddelbart Noget, et Tilværende, man kunde anskue og ligefrem paapege; denne Forestillingens Umiddelbarhed forsvinder, naar man begynder at opfatte Eenheden som et Forhold: $\frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} \ldots$ Med Forholdserkjendelsen kommer Indsigten, men Leddene have dog endnu særlig Betydning ligeoverfor det Forhold, hvis Led de ere: Forholdserkjendelsen er endnu overfladisk. Ved Betegnelsen $\frac{a}{a}$ skeer et betydeligt Fremskridt, idet det almindelige Udtryk afløser de particulære, og det bringes til Bevidsthed, at Størrelser ikke blot kunne indgaae i forskjellige Relationer, men at Relationen nødvendig hører med i Størrelsens Væsen. De algebraiske Betegnelser ere imidlertid behæftede med den Biforestilling, at enhver nok saa vilkaarlig Størrelse maa være endelig. Ligningerne: $\frac{a}{b} = 3$, $\frac{b}{c} = 4$, $\frac{c}{d} = e$ have jo vistnok deres Betydning i Forholdene af a og b, b og c, c og d; men den Indbildning, at disse bestemte Forhold ville opløse sig i Ubestemthed, naar a, b, c og d ophørte at være endelige Størrelser, er endnu ikke hævet. Denne Indbildning forsvinder: naar det sees, hvad der ligger i Betegnelsen: $\mathrm{Lim}\,\frac{x}{x} = \lim \frac{x}{x} = \frac{\infty}{\infty} = 1$, thi hvorledes man end forklarer sig $\frac{\infty}{\infty}$ og $\frac{0}{0}$, staaer dette dog fast, at Eenheden her bliver opfattet som det rene Forholdsudtryk. At det ved et saadant Forholdsudtryk aldeles ikke kommer paa de endelige Led, men ene og alene paa det ved Leddene bestemte Forhold, kan neppe tilkjendegives paa en mere eftertrykkelig Maade, end derved, at det bestemte Forhold bliver staaende uforandret, efterat ∞ og 0 have indtaget Leddenes Plads.

At Størrelsesbegrebet maa fuldendes i Functionsbegrebet, indlyser deraf, at Functionsloven, som ovenfor angivet, paa een Gang omfatter det Endelige og det Uendelige. Af $f(x) = y$ og $f(x+h) = y + k$ følger $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{k}{h}$, og $\lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim \frac{k}{h} = \frac{dy}{dx}$. I $f(x+h) - f(x) = k$ er h en Størrelse for sig, k ligeledes; h og k have i endelig Sammenligning umiddelbar Gyldighed; en saadan Gyldighed kan i $f(x + dx) = y + dy$ derimod ikke tillægges dx og dy, hvorfor den exacte Analyse da ogsaa idelig sætter sig imod, at de uden videre opfattes som Størrelser; i reen Umiddelbarhed ere de da heller ikke Størrelser: som Forholdsstørrelser ere de dialektiske. Overseer man det Dialektiske, kan man beskrive Differentialet, hvordan man vil; man træffer aldrig Sagen. Differentialet dy er, ifølge $f(x + dx) - f(x)$, en uendelig lille Differens; men den uendelig lille Differens har i sig den Modsigelse at være som 0 og dog større end 0. Opfattes Differentialet ikke som Størrelse, men som Størrelsesanlæg, maa et Anlæg til Størrelse jo dog i Principet selv være Størrelse. Bestemmer man Differentialet ikke som en vilkaarlig lille, men som en uendelig forsvindende Størrelse, hvorledes kan man da i $f(x + dx) = y + dy$ sætte $dx = dx$, medens dy varierer? Hvorledes kan en bestandig vordende, en uophørlig forsvindende d. v. s. ikke værende Størrelse være constant? Anerkjender man derimod det Dialektiske, vil Differentialet, som uendelig lille Differens, som Størrelseselement, som Forholdsmoment, fra alle Sider belyse Størrelsesbegrebet. Haves $f(x + dx) = 4(x + dx) = 4x + 4dx = y + dy$, saa er unegtelig $dy = 4dx$, og forsaavidt synes vi i dy og dx at have umiddelbare Størrelser; men idet Eftertrykket falder, ikke paa dy og dx for sig, som om vi ved $dx + dx + dx + dx$ kunde erholde dy, men paa $\frac{dy}{dx}$,

altsaa paa Forholdet; dive Differentialerne herved udtrykkelig bestemte som Forholdsmomenter. I Ligningen $dy = 4dx$ er 4 den Coefficient, hvormed dx skal multipliceres for at give dy, men som umiddelbar Størrelse er Coefficienten endnu ikke svarende til sit Begreb: Differentialcoefficient. For at erkjendes som Differentialcoefficent maa 4 fra en umiddelbar Størrelse forvandles til et i sig reflecteret Forholdsudtryk: $\frac{dy}{dx}$. At $dy = \frac{dy}{dx} dx$, maa ikke forstaaes tautologisk, som om her stod $a = \frac{a}{b}.b$; thi $\frac{dy}{dx} = 4$ betegner udtrykkelig en til et Forhold forvandlet Størrelse, en Forholdsstørrelse: Differentialcoefficenten er væsentlig Qvotient. Differentialcoefficienten, som i det exacte Sprog er Grændsen for Forholdet imellem de sammenhørende og samtidig forsvindende Tilvæxter til den afhængige og uafhængige Variable, giver altsaa Differentialet sin Betydning, ikke omvendt.

Dialektikens anskuelige Billede er Bevægelsen, navnlig Rumsbevægelsen. Newton, som for at løse phoronomiske Opgaver, tager Geometrien til Hjælp, fremstiller den ligelig voxende Tid som Abscisse, det i Tiden gjennemløbne Rum som Ordinat. Curvens Coordinater, der forestille de stedse foranderlige, af- og tiltagende Størrelser, Tiden og Rummet, kalder han „Fluenterne", og betegner dem ved x, y o. s. v., Hastighederne derimod, hvormed de af- eller tiltage, kalder han „Fluxioner", og betegner dem ved $\dot{x}$, $\dot{y}$ o. s. v. Det forstaaer sig af sig selv, at Abscissens Fluxion $\dot{x}$, da den fremstiller Hastigheden for Tiden, som den jo repræsenterer, og Tiden tænkes at voxe ligelig (»uniformiter fluens»), maa betragtes som constant. Det følger da heraf, at den anden, den tredie og alle følgende Fluxioner af x ere lige med Nul, endvidere, at Fluxionen af x er det Maal, hvormed Fluxionen af y maales, og altsaa kan antages for Eenhed. Idet nu Tid og Rum og

følgelig de Linier, hvorved de repræsenteres, x og y, have i Øieblikket, d. e. i Tiden 0, den ene Hastigheden $\dot{x}$, den anden $\dot{y}$, vil disse Liniers Til- og Aftagen, da denne jo er ligefrem proportional med Hastigheden, kunne udtrykkes ved $\dot{x}0$ og $\dot{y}0$. Denne med Hastigheden proportionale Til- eller Aftagen af Fluenterne, der maa være uendelig lille, da Hastigheden jo kun med Hensyn paa det enkelte Øieblik kan ansees for constant, betegner Newton ved Udtrykket: Moment. [1])

„Der Gedanke kann nicht richtiger bestimmt werden, als Newton ihn gegeben hat. [2]) Ich trenne dabei die

---

[1]) Jvfr. Weissenborn. Die Principien der höheren Analysis. S. 21—57.

[2]) Ogsaa her have vi et Exempel, som godtgjør, hvorledes et Begreb, der, saalænge det holdes i logisk Almindelighed, viser sig som aldeles tilfredsstillende, dog alligevel, naar det gjælder en articulerende Discretion, en Udviling af punktuelle Bestemmelser, kan være mangelfuldt og utilfredsstillende. „Man hat öfter die Fluxionsmethode der jetzt vielfach gebräuchlichen Grenzmethode nahe gestellt, und dies grossentheils mit gutem Rechte, indem Newton stets auf Verhältniss der Fluxionen $\dot{y}$ und $\dot{x}$ kommt. Auf diese Weise umgeht er die Schwierigkeit, die den damaligen Mathematikern ein unüberwindliches Hinderniss schien, nämlich das Rechnen mit uendlich kleinen Grössen oder Null. Denn so lange die Incremente endlich sind und eine angebbare Grösse besitzen, hat ihre Anwendung im Calcul kein Bedenken, Newton lässt sie auch bis zu Null abrechnen, und nennt sie denn Momente oder auch („Princ. phil. nat.« Lib. II. Sect II. Lemma II. pag. 251 der ersten Ausgabe und „Tractatus de quadratura curvarum." Prop. I. Problem I. Demonstratio.) »incrementa momentanea" oder „momenta nascentia sive evanescentia", er hütet sich aber wohl, mit diesen zu rechnen, sondern lässt im Zustande des Verschwindens die Fluxionen, endliche und bestimmte Grössen, gewissermassen als Reserve an die Stelle der zum weiteren Dienste untauglich gewordenen Momente einrücken, auf diese Weise das Rechnen mit unendlich kleinen Grössen, welche Null sein und doch noch einen von Null verschiedenen Werth besitzen sollen, auf das

Bestimmungen ab, die der Vorstellung der Bewegung und der Geschwindigkeit angehören, (von welcher er vornehmlich den Namen Fluxionen nahm), weil der Gedanke hierin nicht in der gehörigen Abstraction, sondern konkret, vermischt mit ausserwesentlichen Formen erscheint. Diese Fluxionen erklärt Newton (Princ. mathem. phil. nat. L. I. Lemma XI. Schol.) dahin, daß er nicht untheilbare — eine Form, deren sich frühere Mathematiker, Cavalleri und andere, bedienten, und welche den Begriff eines an sich bestimmten Quantums enthält, verstehe, sondern verschwindende Theilbare. Ferner nicht Summen und Verhältnisse bestimmter

Glücklichste vermeiden; und wenn er (»Tractatus de quadratura curvarum.“ Introductio) sagt: „Volui ostendere, quod in methodo fluxionum non opus sit figuras infinite parvas in Geometriam introducere«, und ebendaselbst: Quantitates mathematicas non ut ex partibus quam minimis constantes, sed ut motu continuo descriptas hic desidero«, so muß man unbedingt zugeben, daß er nicht mehr verspricht als er in der That gehalten hat. Unstreitig würde der große Vortheil, den seine Methode durch die Vermeidung des zu Widersprüchen führenden Begriffs des Uendlichkleinen, wodurch zugleich der unnatürlichen Auffassung der Curven als Polygone vorgebeugt wurde, über die Differenzialmethode, wie sie lange Zeit hindurch dargestellt ward, gewonnen hatte, — unstreitig würde dieser grosse Vortheil ihr schon frühe den Vorrang vor der Leibnizischen Theorie verschafft haben, wenn ihn nicht Newton dadurch erkauft hätte, daß er die Rechnung aus dem Gebiete der Geometrie weg in das der Phoronomie hinüberspielte. Dazu kam aber noch als zweites sehr wichtiges Moment, daß die Fluxionsrechnung Newtons eines hinlänglich passenden und ausgebildeten Algorithmus entbehrte, was sich besonders beim Uebergehen von den Fluxionen zu den Fluenten als ein Nachtheil sehr bemerklich macht. Denn es war ja hauptsächlich die Auffindung eines solchen Algorithmus, um die sich damals Alles drehte. So kann es denn nicht wunderbar sein, wenn die Leibnizische Differenzialrechnung, welche alle Forderungen, die in dieser Beziehung gestellt werden können, auf das Vollkommenste befriedigt, der Fluxionsrechnung trotz ihrer sichereren Begründung sehr bald den Rang ablief.“ Weissenborn. Anfrt. Skr. S. 57—58.

Theile, sondern die **Grenzen** (limites) der **Summen** und Verhältnisse. Es werde die Einwendung gemacht, daß verschwindende Grössen kein **letztes Verhältniß** haben, weil es, ehe sie verschwunden, nicht das Letzte, und wenn sie verschwunden, keines mehr ist. Aber unter dem Verhältnisse verschwindender Grössen sey das Verhältniß zu verstehen, **nicht ehe** sie verschwinden, und nicht **nachher**, sondern **mit dem** sie verschwinden (quacum evanescunt). Ebenso ist das erste Verhältniß werdender Grössen, das mit dem sie werden." [1])

β) **Differentialcoefficienternes forskjellige Orden: System af Forholdsstørrelser.**

Uagtet det, væsentlig seet, er Differentialcoefficienten, der giver den Afhængiges og Uafhængiges Differentialer deres Betydning, maa den dog som et Differentialernes Forhold nødvendig forudsætte Differentialerne selv, og kommer forsaavidt til at beroe paa disses eiendommelige Gyldighed. I mathematisk Praxis kan det maaskee have sin Betydning, at man holder sig exact til det i Grændsen Negative, og sætter Differentialcoefficienten $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$; men herved er den paa Indseen og Begriben arbeidende Tænkning ingenlunde tilfredsstillet. I Udtrykket $\frac{0}{0} = 4$ kan $\frac{0}{0}$ umulig gaae paa et Nærværende, men kun paa et Forbigangent og et Tilkommende. Skulde man virkelig antage $\frac{0}{0} = 4$, maatte man antage et Forhold uden Forholdsled, et Forhold af Intet med Intet; $\frac{0}{0}$ er altsaa ikke 4, betegner heller ikke, at 4 endnu er, efter at det tilsvarende Forholdsudtryk er forsvundet, men tilkjendegiver kun, at 4 har været,

---

[1]) Hegel. Wissensch. der Logik. 1ster Th. Berlin 1833. S. 302—303.

idet her har været et nu forsvundet Forhold. Skal $\frac{0}{0}$, strengt taget, betegne Differentialcoefficienten, saa er Differentialcoefficienten ingen Størrelse; skal Efterttrykket falde paa 4, saa er 4 som umiddelbar Størrelse ingen Differentialcoefficient. Mathematiken sætter da heller ikke uden videre $\frac{0}{0} = 4$; ved Betegnelsen for det Forsvundne mindes den endnu det Forsvundne, erindrer sig, hvad det egentlig var, der forsvandt, og hvorledes det forsvandt: $\lim \frac{4(x+h)-4x}{h} = \frac{0}{0} = 4$. Indsigten er her i strengeste Forstand en Erindring; i Erindringen sees det Forbigangne som et Nærværende: det Negerede reflecterer sin Væren i Negationen. Idet $\frac{dy}{dx}$ sættes istedetfor $\frac{0}{0}$, kunne de forsvindende Led udgjøre et endnu værende Forhold, en Forholdsstørrelse af bestemt Værdi.

Som bestemt Forholdsstørrelse kan Differentialcoefficienten være enten endelig eller uendelig, enten constant eller variabel. Saaledes er i $f(x + dx) = a(x + dx) = ax + adx = y + dy$ Differentialcoefficienten $\frac{dy}{dx} = a$ constant; i $f(x + dx) = (x + dx)^2 = x^2 + 2xdx + dx^2 = y + dy$ er $\frac{dy}{dx} = 2x$ derimod variabel. Som variabel Størrelse kan Differentialcoefficienten $f'(x) = \frac{dy}{dx} = 2x$ igjen differentieres; hvorimod $f'(x + dx) = 2(x + dx) = f'(x) + f''(x)dx + \ldots = y_1 + dy_1$ giver en Differentialcoefficient: $\frac{dy_1}{dx} = 2$, der, som constant Størrelse, ikke kan differentieres. Da Differentialcoefficienten allerede som saadan er en Forholdsstørrelse, er den differentierede Differentialcoefficient som en ved en Forholds-

størrelse bestemt Forholdsstørrelse $\frac{dy_1}{dx} = \frac{d\frac{dy}{dx}}{dx}$, en Forholdsstørrelse af anden Orden $\frac{d^2y}{dx^2}$; paa denne Maade kunne Forholdsstørrelserne udvikle sig i et System af lavere og høiere Ordener. Af $f(x)_\iota = y = x^n$ t. Ex. faaes:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)\frac{h}{1} + f''(x)\frac{h^2}{1.2} + f'''(x)\frac{h^3}{1.2.3} + \dots$$

$$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}\frac{h}{1} + n(n-1)x^{n-2}\frac{h^2}{1.2} + n(n-1)$$
$$(n-2)x^{n-3}\frac{h^3}{1.2.3} + \dots$$
$$= y + \frac{dy}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \dots$$

Hvilken indre Uendelighed et saadant System af Forholdsstørrelser kan omfatte, sees, naar vi vælge en Function af flere indbyrdes uafhængige Variable, t. Ex. $f(x_1, x_2, \dots x_t) = u$. I den til $f(x_1 + h_1, x_2 + h_2 \dots x_t + h_t) \sim e^{\frac{du}{dx_1}h_1 + \frac{du}{dx_2}h_2 + \dots \frac{du}{dx_t}h_t)}$ svarende Rækkeudvikling, hvor $\frac{1}{[r_1 + r_2 + \dots r_t]}\left(\frac{du}{dx_1}h_1 + \frac{du}{dx_2} + \dots \frac{du}{dx_t}h_t\right)^{(r_1+r_2+\dots r_t)}$ er det almindelige Led, er, idet de til Symboliken svarende Ændringer, hvorved Potensexponenter forvandles til Differentiationsindices, ere foretagne, $\frac{d^{r_1+r_2\dots r_t}u}{dx_1^{r_1}dx_2^{r_2}\cdots dx_t^{r_t}}\frac{h_1^{r_1}}{[r_1]}\cdot\frac{h_2^{r_2}}{[r_2]}\dots\frac{h_t^{r_t}}{[r_t]}$ igjen dette almindelige Leds almindelige Led, hvori Differentialcoefficienten altsaa kan fremstille Forhold af Forhold i det Uendelige. [1])

[1]) At den indre Uendelighed kan fra uendelig mange Sider ligeledes opgaae for Anskuelsen, viser den analytiske Geometrie. Skal, for at vælge et Exempel af Fladers Generation, en Flade danne sig

Hvorledes Differentialcoefficienter af forskjellig Orden i deres Anvendelse faae en forskjellig Betydning, kan sees

---

ved Bevægelsen af en vis Linie $\begin{cases} F_1 (x, y, z, \alpha, \beta, \gamma \ldots\ldots) = 0 \\ F_2 (x, y, z, \alpha, \beta, \gamma \ldots\ldots) = 0' \end{cases}$ hvori $\alpha, \beta, \gamma \ldots\ldots$ ere Constanter, der dog variere fra den ene Stilling af Linien til den anden: maae, for at Loven for denne Variation kan være bestemt, visse Betingelser forudsættes, f. Ex. at Frembringeren (Generatrix) under sin Bevægelse skal skjære et Antal Ledelinier. Antage vi, at der i ovenstaaende Ligninger indgaae n Constanter, maae Betingelserne gjøre det muligt at faae disse n Constanter eliminerede, thi den Flade, der skal dannes, er Indbegrebet af samtlige Frembringerstillinger, og kan altsaa ikke afhænge af nogen enkelt især, d. v. s. Fladens Ligning maa være uafhængig af $\alpha, \beta, \gamma \ldots\ldots$ Vi maae altsaa i det Hele kunne danne $(n+1)$ Ligninger mellem $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma \ldots\ldots$ For nu ret at tydeliggjøre, hvilken Uendelighed af Flader der kan dannes af en given Frembringer, ville vi for et Øieblik tænke os, at vi for de n første af de $(n+1)$ Ligninger have en aldeles bestemt Functionsform, medens den $(n+1)$te Lignings Form er ubestemt; her er da for denne $(n+1)$te Ligning en Uendelighed af Former mulig; for hver enkelt Form, vi vælge, faae vi en Flade, altsaa en Uendelighed af Flader. Betænke vi derhos, at vi jo kunne lade hver enkelt af de $(n+1)$ Ligninger skifteviis have en ubestemt Form, da bliver det klart, hvilken Uendelighed af Flader det ene System af $(n+1)$ Ligninger ved Eliminationen af de n Constanter kan give Anledning til. I denne uendelige Vrimmel er fremdeles en systematisk Deling mulig. For at foretage en saadan Deling, kunne vi særlig tage Hensyn til 1) Frembringeren og 2) Loven for Frembringelsen. Alle de Flader, som have samme Frembringer, kunne da henføres til samme **Klasse**; hver enkelt Klasse kan endvidere deles i **Familier**, der alle have Klassens Særkjende, nemlig den samme Art Curver til Frembringere; Familiens Særkjende sees af den Lov, hvorefter Generatrix bevæger sig. Indenfor hver Familie fremkommer derimod forskjellige **Arter**, idet den samme Lov optræder i forskjellige Modificationer, og indenfor samme Art deforskjellige **Individer**, idet bestemte Størrelser indsættes i den særskilte Form. Cylindrene udgjøre saaledes for sig en stor Familie, der hører under Classen af retlinede Flader; Familiens Særkjende er, at alle Frembringerstillinger ere parallele. Frembringeren kan nemlig under sin Be-

af Exempler saavel fra Geometrien som fra Mechaniken. Vælge vi fra Geometrien Røringsproblemet, og lade $f(x) = y$, $\Phi(\xi) = \eta$ være Ligningerne for to Curver, som have Punktet (x, y) fælleds, saa bliver Differensen af de til Punktet (x, y) svarende consecutive Ordinater at udtrykke ved:

$$f(x) - \Phi(x) + (f'(x) - \Phi'(x))\frac{h}{1} + \dots (f^n(x) - \Phi^n(x))\frac{h^n}{[n]} \dots,$$

$$y - \eta + \left(\frac{dy}{dx} - \frac{d\eta}{d\xi}\right)\frac{h}{1} + \dots \left(\frac{d^ny}{dx^n} - \frac{d^n\eta}{d\xi^n}\right)\frac{h^n}{[n]} \dots,$$

hvori $y = \eta$, $x = \xi$. Størrelsen af denne Differens afhænger, idet h har samme uendelig lille Værdi, af hvilket Led der er det første, som ikke er 0, d. v. s., af, hvilken Orden Røringen er; er f. Ex. $y = \eta$, $\frac{dy}{dx} = \frac{d\eta}{d\xi} \dots \frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d^n\eta}{d\xi^n}$, men $\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} \gtrless \frac{d^{n+1}\eta}{d\xi^{n+1}}$, saa at Røringen er af nte Orden; da er α) Differensen desto mindre, jo større n er, og β) skifter Fortegn med h, naar n er lige, men ikke, naar n er ulige. Til (α) svarer en desto inderligere Røring, d. e. de to Curver have desto flere Elementer tilfælleds, jo større n er; ved (β) afgjøres det, hvorvidt Røringen er forbunden med Skjæring, eller ikke. I Mechaniken afgiver Udtrykket for Hastigheden: $v = \frac{ds}{dt}$, og for Kraften: $\Phi = \frac{d^2s}{dt^2}$ letfattelige Exempler.

---

vægelse vedblive at være parallel med sig selv, og dog frembringe meget forskjellige Arter af Cylindre: Omdreiningscylindre, hyperbolske Cylindre o. s. v. Omdreiningscylindre t. Ex. afgive en Uendelighed af Individer, thi for hver forskjellig Radius, vi give den paa Frembringeren perpendiculære Cirkel, faaes et forskjelligt Individ. (Kategorierne: Classe, Familie, Art, Individ anføres her efter en Forelæsning af Hr. Prof. A. Steen).

Af Differentialcoefficienternes Anvendelse sees endvidere, at Differentialerne selv umulig kunne være rene Nuller, men maae som bestemte Forholdsmomenter være Størrelsesanlæg, og følgelig i Principet selv Størrelser. Saaledes viser Betingelsen for Røringen af nte Orden, at de to Curver have følgende Punkter tilfælleds:

Abscisser:	Ordinater:
x	$y, \quad (\eta)$
$x + dx$	$y + dy, (\eta + d\eta)$
$x + 2\,dx$	$y + 2dy + d^2y, (\eta + d\eta + d^2\eta)$
. . . .	. . . .
$x + n\,dx$	$y + n\,dy + \frac{n\,(n-1)}{1.\,2} d^2y \ldots d^ny,$
	$(\eta + n\,d\eta + \ldots\, d^n\eta)$

Røringen af nte Orden vil altsaa med andre Ord sige, at de to Curver have n consecutive Elementer tilfælleds. Mathematiken gjør selv Forskjel paa Røring af nte og Røring af 1ste Orden, og lærer da med det Samme, at det at have n Elementer tilfælleds, er, for $n > 1$, mere end at have eet Element fælleds, eller i Tegn: $n\,dx > dx$; men naar $n\,dx > dx$, uagtet n er et endeligt Tal, kan dx umulig være 0. [1])

At Differentialet som saadant ikke umiddelbart kan være 0, sees, om muligt, endnu tydeligere, naar vi, hvad Be-

---

[1]) I den deskriptive Geometrie, for ogsaa at see Sagen fra denne Side, bevises ved Anvendelse af Keglesnittenes projective Egenskaber, at, naar en Sexkant indskrives i et Keglesnit, da ligge de 3 Punkter, hvori denne Sexkants modstaaende Sider skjære hinanden, to og to, i een og samme rette Linie. En Femkant er da i Conseqvens heraf at betragte som en Sexkant med **een uendelig lille Side**; denne uendelig lille Side er imidlertid mere end et Punkt, thi den angiver Retningen af Tangenten til Keglesnittet (og et Punkt kan ikke angive nogen Retning; derfor ville ogsaa de 3 Punkter, hvori Femkantens modstaaende Sider samt Tangenten skjære hinanden, to og to, ligeledes ligge i een og samme rette Linie.

vægelsen angaaer, betragte Forholdet af Rummet og Tiden. Medens nemlig $\frac{ds}{dt} = v$ betegner et Forhold af Rum og Tid og derved en i sit Anlæg bestemt Hastighed, kan $\frac{0}{0}$, der jo udtrykker en absolut Fornegtelse, saavel af Tiden som af Rummet, og altsaa falder i den rene Abstraction udenfor Tid og Rum, umulig angive Hastighedsanlæg for en Bevægelse, der skal foregaae i Tid og Rum. Ved eensidig at fastholde de abstracte Beregningsudtryk seer man feil af Sagens Væsen, og hilder sig i en Modsigelse. I Ligningen $f(t + dt) = s + ds$ er dt constant, medens ds kan variere, eftersom t varierer; hvor dialektisk denne constante Størrelse imidlertid er, indlyser blandt Andet deraf, at man for en varierende Hastighed sætter $v = \frac{ds}{dt}$, som om v i Tidselementet dt var constant. Er nu $dt = 0$, saa er her hverken Hastighed eller Hastighedsanlæg; er dt derimod ikke 0, men et virkeligt Tidselement, saa vedbliver Hastigheden endog i det valgte Tidselement at variere; her er da en Varieren, som, idet den svarer til Anlæg og Mulighed, kun ved at svæve imellem Noget og Intet, og saaledes holde sig dialektisk, kan svare til sit Begreb.

γ) Differentiationsprinciper: den ved Forholdsconseqvenserne bestemte Methode.

Hvilke forskjellige Indtryk den af Leibnitz indførte Differentialregning gjorde paa hans Samtidige, sees blandt Andet deraf, at medens Mathematikere som Jacob og Johan Bernouilli anvendte den med Held paa de vanskeligste Problemer, vilde Leibnitzes Ven Huygens ikke forlade de Gamles Methode, og Hollænderen Nieuwentiit optraadte endog polemisk, idet han indvendte: 1) at Leibnitz ligesaalidt som Barrow og Newton, hos hvem allerede de uendelige Størrelser forekom, kunde forklare, hvorledes disse Størrelser adskilte sig fra Intet eller Nul; 2) at det ikke

var klart, hvorledes Differentialerne af høiere Orden lode sig afskille fra dem af første Orden, og 3) at Differentialmethoden ikke lod sig anvende paa Exponentialfunctionen[1]). Den Vaklen og Usikkerhed, der gaaer igjennem Leibnitzes Forklaringer og Forsvar, viser tydelig nok, at man var kommen ind paa en ny Bane, en Vei, hvis Retning og Beskaffenhed først efterhaanden kunde blive undersøgt og nærmere prøvet.[2]). Men medens det Uendeliges Analyse

---

[1]) Weissenborn anfr. Skr. S. 98.

[2]) Hvad Leibnitz skriver til Oldenburg i et Brev fra Paris, 27 August 1676: Fateor tamen nondum me quicquid in hoc genere desiderari potest consecutum, quanquam maximi momenti esse sciam, gjælder ikke blot for Datiden, men tildeels ogsaa for den følgende Tid. Jvfr. Gerhardt: Die Entdeckung der Differentialrechnung durch Leibnitz. Halle 1848. S. 26. „M. Maclaurin, l'un des plus grands Géometres de ce siecle (18de Aarh.) éléva le premier sa voix au milieu des acclamations qu'attiroient les utilités réelles du Calcul des Infiniment-Petits. Il osa avertir du danger qu'on couroit en s'y livrant avec tant de confiance. Il n'y a rien de concevable, dit il, dans la supposition d'un nombre Infiniment-Grand ou Infiniment-Petit; & le passage du Fini à l'Infini est obscur et incomprehensible.« M. Saverien. Histoire critique du Calcul des Infiniment-Petits (i »Application de la Géométrie ordinaire«) S. 7—8.

„Da ... Einiges in Newtons Verfahren nicht hinreichend klar nnd deutlich war, so könnte es nicht fehlen, dass dasselbe mannigfache Angriffe zu erleiden hatte. Gegen dieselben trat Maclaurin auf [„Treatise of Fluxions“), um einerseits alle Zweifel, die noch in der Fluxionsrechnung übrig seien, zu zerstreuen, andererseits die Leibnizische Differentialmethode anzugreifen. Der letzeren machte er zwei Dinge zum Vorwurfe, einmal nämlich, dass das Uendlichkleine für den menschlichen Verstand unfassbar, sodann dass Leibnitz selbst den Begriff des Uendlichkleinen für eine blosse „Fiction“ erklärt habe.“ Weissenborn. S. 58.

Endnu et charakteristisk Træk af ovennævnte Histoire du Calcul des Infiniments-Petits. Efter en kort Beskrivelse af den Archimediske Grændsemethode vedbliver Forfatteren S. XIV saaledes: „Cette méthode fut long-tems en usage. Dans la vûe de la

saaledes vistnok i en Henseende giver os noget aldeles Nyt, er dette Nye dog ikke desto mindre, naar de Overgangsstadier, Videnskabens Historie udviser, tages i Betragtning, en naturlig Consequens af de oprindelige Forudsætninger, en Udfoldning af de i det Gamle værende Spirer: Størrelsens Udvikling til Forholdsstørrelse er her et Afgjørende. For at see, hvorpaa det i Differentiationsprinciperne Eiendommelige væsentlig beroer, mærke man sig Fremgangsmaaden ved de enkelte Functioner, dernæst Behandlingen af de sammensatte, og, hvad Methoden i dens Heelhed angaaer, Brugbarheden af Taylors Række som Functionssystemernes Grundformel.

Hvad Enkeltfunctionerne angaaer, bliver jo Differentialcoefficienten bestemt derved, at Fremstillingen ligefrem svarer til Definitionen; saaledes er: $\frac{d(a+x)}{dx}$ $= \lim \frac{a+(x+h)-(a+x)}{h} = \lim \frac{h}{h} = 1$; $\frac{d(ax)}{dx}$

---

simplifier, on crut qu'on pouvoit se passer de concevoir des figures circonscrites et inscrites dans des aires curvilignes, comme étant toûjours finies et déterminables. L'expédient qu'on trouva pour cela, fut de substituer à ces figures finies et déterminables des élémens indivisibles ou Infiniment-Petits. Le nombre de ces élémens étant supposé infini, leur somme est évidemment égale à l'aire curviligne. On doit cette idée à Cavallieri. Quelque séduisante qu'elle lui parut par sa simplicité, elle ne le rassura pas sur son entiere certitude. Ce nombre infini lui paroissoit géométriquement indéterminable. Il tâchoit donc d'écarter cette idée de nombre infini, lorsqu' il reconnut bien des difficultés qu'il ne put résoudre. C'en fut assez pour lui rendre suspecte sa nouvelle Géométrie. Afin de l'appuïer, Cavallieri joignit des démonstrations incontestables à celles qu'il avoit déduites de ces principes hypothetiques; mais ce mélange de vérités & de suppositions, bien loin de rassurer les esprits, les inquiéta. On vit alors pour la premiere fois (selon la juste remarque de M. Maclaurin, dans l'Introduction de son Traité des Fluxions) des disputes parmi les Géometres."

$$= \lim \frac{a(x+h) - ax}{h} = \lim \frac{ah}{h} = a; \ \frac{dx^n}{dx} = \lim \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$= nx^{n-1}$ o. s. v. Det Eiendommelige sees altsaa af Forholdsstørrelsernes indbyrdes Forhold.

For at differentiere en sammensat Function udvikler man den i Række efter stigende Potenser af h, men da denne Række egentlig faaer sin Betydning ved de Enkeltfunctioner, hvoraf den sammensatte bestaaer, maae disse særlig udvikles i en Række for sig, af disse igjen en til Functionens Sammensætning svarende enkelt Række dannes, og de ubestemte Coefficienters Methode anvendes. Saaledes finder man $\frac{d(y_1 + y_2)}{dx}$, idet $Y = y_1 + y_2$, d. v. s. $F(x) = f_1(x) + f_2(x)$, ved at udvikle $F(x+h) = f_1(x+h) + f_2(x+h)$ i Række; altsaa: $F(x+h) = F(x) + F'(x)\frac{h}{1} + \ldots\ldots = f_1(x) + f_2(x) + f_1'(x)\frac{h}{1} + f_2'(x)\frac{h}{1} + \ldots\ldots$; da nu, ifølge de ubestemte Coefficienters Methode, $F'(x) = f_1'(x) + f_2'(x)$, saa er $\frac{d.Y}{dx} = \frac{d(y_1 + y_2)}{dx} = \frac{dy_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx}$. Er Opgaven at finde $\frac{d(y_1 . y_2)}{dx}$, saa bliver $F(x+h) = f_1(x+h) \, f_2(x+h)$ $= F(x) + F'(x)\frac{h}{1} + \ldots = (f_1(x) + f_1'(x)\frac{h}{1} + \ldots)\,(f_2(x) + f_2'(x)\frac{h}{1} + \ldots) = f_1(x).f_2(x) + (f_1(x).f_2'(x) + f_2(x)f_1'(x))\frac{h}{1} + \ldots$, altsaa: $F'(x) = f_1(x)f_2'(x) + f_2(x)f_1'(x)$, det vil sige: $\frac{d(y_1 y_2)}{dx} = y_1\frac{dy_2}{dx} + y_2\frac{dy_1}{dx}$, o. s. v.

Det kan i denne Sammenhæng naturligviis ikke være Opgaven at anføre de enkelte „Differentiationsregler“; Begrebsudviklingen dreier sig i det Væsentlige om Betingelserne for Taylorsrækkens Anvendelse. For at erholde den enkelte

Differentialcoefficient $f'(x)$ alene, maa man jo lade Ræk-kens øvrige Led bortfalde. Denne Leddenes Bortfalden faaer nu vistnok en exact Begrundelse derved, at man i Ligningen:
$\lim \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) + f''(x)\frac{h}{1.2} + f'''(x)\frac{h^2}{1.2.3} + \ldots$
antager $h = 0$; men ved at gjøre h til 0, gjør man med det Samme $f'(x)$ til $\frac{0}{0}$, og de ovenfor paapegede Vanskeligheder vende tilbage. Betragter man derimod h ikke som 0, men som dx, da faaer man, for $f(x+h) = y + k$, vel en virkelig Differentialcoefficient $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ istedetfor en i sig modsigende Betegnelse; men saa synes der igjen at tilkomme Summen af Rækkens øvrige Led en saadan Betydning, at de, naar man fordrer et exact Udtryk, ikke kunne bortkastes.

Denne Mislighed hæves ved nærmere Betragtning af den omhandlede Række. Til $f(x) = (x-a)^n$ svarer $(x+h-a)^n = ((x-a)+h)^n = (x-a)^n + n(x-a)^{n-1}\frac{h}{1} + n(n-1)(x-a)^{n-2}\frac{h^2}{1.2} \ldots\ldots + n(n-1)\ldots(n-r+1)(x-a)^{n-r}\frac{h^r}{[r]} \ldots\ldots$ Er nu 1) n positiv heeel, da er Rækken afsluttet med h^n, og, forsaavidt vi endnu betragte den som Taylors Formel, $\frac{d^{n+p}(x-a)^n}{dx^{n+p}} = 0$, idet $\frac{d^n(x-a)^n}{dx^n} = c$. Er 2) n negativ, da sees, at alle Differentialcoefficienterne maae indeholde $(x-a)$ i Nævneren, og altsaa, naar $x = a$, $\frac{d^ny}{dx^n} = \infty$. Er 3) n brudden, t. Ex. $n+1 > r > n$, da er det klart, at $\frac{d^r(x-a)^n}{dx^r} = n(n-1)$

$$\ldots . (n-r+1)(x-a)^{n-r} = \frac{n(n-1)\ldots.(n-r+1)}{(x-a)^{r-n}},$$

og at altsaa $\frac{d^r(x-a)^n}{dx^r}$ maa indeholde $x-a$ i Nævneren. Differentialcoefficienterne af høiere end rte Orden maae da saaledes, for $x=a$, alle blive $=\infty$. Resultatet er nu dette: Taylors Formel, skjøndt almindelig gjældende, kan for specielle Værdier af x blive ubrugelig; men, naar Rækken er brugelig, er den for $\mathrm{Lim}\frac{f^{n+1}(x)}{(n+1)f^n(x)}h<1$ altid convergent, og destomere convergent, jo mindre h er, med andre Ord: jo mindre h er, desto færre Led behøves for at opnaae en vis Grad af Nøiagtighed.

At her i denne Opfattelse dog endnu er noget Utilfredsstillende, har Hegel, og det ikke uden Grund, udhævet paa følgende Maade: „Lagrange hat bekanntlich die ursprüngliche Methode Newtons, die Methode der Reihen, wieder aufgenommen, um die Schwierigkeiten, welche die Vorstellung des Uendlich-Kleinen, so wie derjenigen, welche die Methode der ersten und letzten Verhältnisse und Grenzen mit sich führt, überhoben zu seyn. Es ist von seinem Functionen-Kalkul, dessen sonstige Vorzüge in Rücksicht auf Präcision, Abstraktion und Allgemeinheit anerkannt genug sind, als hierher gehörig nur dieß anzuführen, daß er auf dem Fundamentalsatze beruht, daß die Differenz ohne daß sie Null werde, so klein angenommen werden könne, daß jedes Glied der Reihe die Summe aller folgenden an Größe übertreffe. — Es wird auch in dieser Methode von den Kategorien vom Zuwachs und von der Differenz der Function angefangen, deren veränderliche Größe den Zuwachs erhalte, womit die lästige Reihe hereinkommt, von der ursprünglichen Function; so wie im Verfolg die wegzulassenden Glieder der Reihe nur in der Rücksicht, daß sie eine Summe konstituiren, in Betracht kommen, und der

Grund sie wegzulassen, in das Relative ihres Quantums gesetzt wird." [1])

For at hæve dette Utilfredsstillende behøve vi dog ikke med Hegel at fordre en saa qvalitativ Afslutning, at vi derved i Grunden opgive Qvantiteten; det er, for at overbevise sig om, at en absolut Nøiagtighed kan opnaaes, tilstrækkeligt at tydeliggjøre sig den qvalitative Forandring, Rækken undergaaer, naar h forvandles til dx. I $\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}$ $=f'(x)+f''(x)\frac{dx}{1}+f'''(x)\frac{dx^2}{1.2}+\ldots.$ maa det fra Mathematikens Standpunkt udtrykkelig fremhæves, at $f''(x)dx$ ikke blot er meget mindre, men uendelig mange Gange mindre end $f'(x)$, at de med andre Ord ere „incomparable". Da nu det Samme gjentager sig i Sammenstillingen af $f'''(x)\frac{dx^2}{1.2}$ med $f''(x)dx$ o. s. v., saa indsees, at Rækkens Led bortfalde, ikke fordi de ere saa ubetydelige, at den Unøiagtighed, der begaaes ved deres Udeladelse er meget ringe; men forbi de som incomparable Led, som Led, der ifølge deres Beskaffenhed tilhøre en anden Sphære, i Begrebet maa bortfalde.

I nogle Tilfælde, hvor det virkelig seer ud, som om man ved at udelade et Led af høiere Orden begik en Feil, viser det sig, at Feilen erstattes, sva at der dog alligevel ikke begaaes nogen Feil. En saadan „Feilens Compensation" kan t. Ex. sees i følgende Tilfælde. For den almindelige Parabel: $y^2=px$ bliver, ifølge Differentiationsmethoden, Subtangenten bestemt ved $subtg=y\frac{dx}{dy}$; $(y+dy)^2=p(x+dx)$ og $dy=\frac{pdx}{2y}-\frac{dy^2}{2y}$; dette giver, idet $\frac{dy^2}{2y}$ bortkastes,

---

[1]) Wissensch. der Logik. 1ster Theil. S. 316—317.

$\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{p}$. Man erholder altsaa: subtg. $= y\frac{dx}{dy} = \frac{2y^2}{p}$, eller, da $y^2 = px$, subtg. $= 2x$. Ved denne Fremgangsmaade synes det vistnok at være en Feil, at Størrelsen $\frac{dy^2}{2y}$ blev udeladt; men ved at lade Differentialet af Parablens Ordinat i det consecutive Punkt falde sammen med Differentialet af Tangentens Ordinat, har man for Parablens Vedkommende fra Begyndelsen af gjort dy for stor. Ifølge en af Apollonius opstillet, og altsaa af Differentialregningen uafhængig Sætning, haves Subtangenten $= 2x$, og, idet vi ved u betegne Forskjellen mellem Differentialet af Tangentens og Parablens Ordinat, haves $\frac{2x}{y} = \frac{dx}{dy + u}$, hvoraf sees, at $u = \frac{dy^2}{2y}$, og at altsaa, det Stykke, der skulde fradrages dy, nøiagtig svarer til det Led, der i Medfør af Differentiationens Princip blev bortkastet [1])

Væsentlig forstaaet bliver i Ligningen $dy = \frac{pdx}{2y} - \frac{dy^2}{2y}$ det sidste Led ikke bortkastet, forbi dy^2 antages at være en endnu mindre Deel af en Linie end dx eller dy, men forbi dy^2 ikke er eensartet med en Linie, men med en Linies Grændse, et Punkt, et forsvindende Moment. Betyder nu Bortkastelsen af et Led, at dette, for at kunne bortkastes, maa være forvandlet fra blivende Størrelse til forsvindende Moment, da maa jo den exacte Handling, seet under Reflexionen, søge sin sidste retfærdiggjørende Grund i en Dialektik.

---

[1]) Weissenborn. Anf. Skr. S. 156—58.

c) Integralet: Elementet og den endelige Størrelse.

Hvad Differentialet egentlig er, kan først tilfulde belyses ved dets Modsætning, nemlig Integralet. „I Modsætning til Differentialet som det Negative er Integralet det Positive. Er Differentialet et Punkt, saa er Integralet en Linie; er Differentialet en Linie, saa er Integralet en Flade, er Differentialet en Flade, saa er Integralet et Legeme. Betyder Differentialet et Moment i Liniens uendelige Discretion, saa betyder Integralet de discrete Momenters Opgaaen i det endelige Continuum; betegner Differentialet det uendelig lille Led, saa betegner Integralet Summen af slige Led i uendelig stort Antal;" [1]) bestemmes Differentialet ved den afledede Function $f'(x)\,dx$, saa bestemmes igjen Integralet ved den oprindelige $f(x)$. Idet den uendelige Summation efterhaanden sees at falde sammen med den Opgave at tilbageføre en afledet Function til den tilsvarende oprindelige [2]), vil Udviklingen af Integralets Begreb tillige vise sig at falde sammen med Uendelighedsproblemets Løsning.

---

[1]) Philos. og Mathem. S. 94, S. 60.

[2]) Idet man definerer Integralet saaledes, at $y = \int f'(x)\,dx$ er den Størrelse, som ved at differentieres med Hensyn til x giver $f'(x)$, faaer man unegtelig ved Integrationen ganske nøiagtig den søgte Function, nemlig $f(x)$; men denne paa Definitionen støttede Nøiagtighed staaer og falder med det Spørgsmaal, om Definitionen selv er adæqvat, d. e., om man nu ogsaa virkelig er berettiget til at sætte $\frac{dy}{dx} = \lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$, eller om ikke Rækken for $\frac{dy}{dx}$ dog egentlig er: $f'(x) + f''(x)\frac{dx}{1.2} + f'''(x)\frac{dx^2}{1.2.3} + \ldots$ og om man saa ikke har begaaet en Unøiagtighed ved af denne Række at bortkaste alle efter $f'(x)$ følgende Led. Ved en given Definition, en vedtagen Betegnelse, kan en Tankeforvirring forebygges; men dermed er et Problem endnu ikke løst.

α) Integrerende Summation: Moment og Element.

Den mathematiske Sætning, at enhver endelig Størrelse kan antages at bestaae af uendelig mange uendelig smaae Dele, er i sin Almindelighed jo vistnok trivial, men dog altid ligesaa betydningsfuld som den logiske Grundsætning, at enhver Ting er, hvad den er. Det Triviale ligger ikke i Abstractionen, men deri, at den tomme Abstraction fastholdes som et Værende, hvorved det Dialektiske oversees, og Begrebsudviklingen standser. Som et givet Hele bestaaer den endelige Størrelse naturligviis af Dele; opfattes nu dette Hele fra Eenhedens Side, sees Continuiteten; opfattes det fra Delenes Side, sees Discretionen. Den Reflexionsfordobling, ifølge hvilken det væsentlige Hele har sin Bestaaen i de bestaaende Dele, kan Størrelsen som det rene Qvantum imidlertid ikke fremstille; det i Qvantitetskategorien Umiddelbare er endnu saa fremherskende, at den ene af Reflexionens Sider forsvinder, naar den anden sættes: idet Discretionen sættes, brydes Continuiteten; idet Continuiteten sættes, forsvinder Discretionen. Adskillelsen af Discretion og Continuitet har igjen foranlediget en Adskillelse af discrete og continuerede Størrelser, som om de udgjorde tvende for sig bestaaende Arter af Størrelser[1]). At en saadan Adskillelse blot er foreløbig, indlyser imidlertid deraf, at en continueret Størrelse kun kan bestemmes, idet man sætter en anden dermed eensartet som Eenhed, og nu undersøger, hvormange Gange denne indeholdes i hiin; men ved en saadan Undersøgelse bliver den continuerede Størrelse jo netop seet under Discretionens Synspunkt. Adskillelsen af discret og continueret Størrelse reducerer sig i Begrebet til en Adskillelse af endelig og uendelig Discretion. [1]) Ved den

---

[1]) „Størrelser kunne enten være discrete (adskilte) eller continuerte (sammenhængende). De første ere blotte Samlinger af hvilkesomhelst eensartede fra hinanden adskilte Enkeltheder (f. Ex. en Men=

914762

Element, en intellectuel Handling, der bestemmer det Endelige som Produkt af det Uendelige. Forholdet imellem Elementet og den endelige Størrelse kan da for det Første opløses ved Summationen.

Er Størrelsen x deelt saaledes, at hver Deel $\Delta x = \frac{x}{4}$, bliver den hele Størrelse: $4\frac{x}{4} = \Sigma \Delta x = x$; tænkes x derimod deelt saaledes, at den enkelte Deel ikke er en endelig Størrelse, men et til Element forvandlet Moment, kan x som endelig Størrelse ikke fremkomme ved Addition: $dx + dx + \ldots.$, men kun ifølge Begrebet derved, at x opfattes som eu uendelig Sum af dx, altsaa som $\int_0^x dx = x$. At Discretionsmomentet dx ikke er 0, men et Element, sees nu ligefrem deraf, at en uendelig Sum af Nuller ikke kan give Andet end 0; men er dx ikke absolut Nul, saa er $\int_0^x$ heller ikke absolut ∞. Betegnes $\int_0^x dx = x$ ved $\infty . 0$, maa det udtrykkelig fremhæves, at ∞ svarer til $\frac{x}{dx}$, idet 0 svarer til dx. Forskjellen imellem $\Sigma_0^x \Delta x$ og $\int_0^x dx$ er ingenlunde den, at kun det første Udtryk skulde angive noget Bestemt, det sidste derimod opløse sig i tom Formalisme; men Forskjellen er, at x opfattes i første Udtryk som discret, i sidste Udtryk derimod som en continueret Størrelse.

Denne Forskjel antager en endnu mere articuleret Form, naar vi sammenligne Summerne [1]) $\Sigma_0^x f'(x)\Delta x$ og $\int_0^x f'(x) dx$.

---

[1]) Ved $\Sigma_0^x f'(x)\Delta x$ forstaae vi her Summen af alle de Værdier $f'(x)\Delta x$ gjennemløber, naar x gjennemløber samtlige Værdier mellem 0 og x med Differensen Δx.

I den endelige Sum $\Sigma_0^x x\Delta x = (\Delta x + 2\Delta x + 3\Delta x + \ldots n\Delta x)\Delta x = (1 + 2 + 3 + \ldots n)(\Delta x)^2$, viser Differensen $\Delta x = 2\Delta x - \Delta x = 3\Delta x - 2\Delta x \ldots$. den endelige Discretion, et Spring, en endelig Afstand imellem de endelige Led; i den uendelige Sum $\int_0^x xdx = (dx + 2\,dx + 3\,dx + \ldots n\,dx)\,dx = (1 + 2 + 3 + \ldots n)\,dx^2$, seer man af Differentialet $dx = 2dx - dx = 3dx - 2dx \ldots$, at Discretionen er uendelig, at her altsaa, med andre Ord, fra 0 til x er en continuerlig Overgang. I Ligningen $\Delta x = \frac{x}{n}$ er n endelig; i Ligningen $dx = \frac{x}{n}$ er n derimod uendelig; som Følge heraf bliver da $\Sigma_0^x x\Delta x = \frac{n(n+1)}{2}\frac{x^2}{n^2} = \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2n}$, medens $\int_0^x x\,dx$ derimod giver $\text{Lim}\,\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)}{2}x^2 = \frac{x^2}{2}$. Medens $\Sigma_0^x x^2\Delta x = [\Delta x^2 + (2\Delta x)^2 + (3\Delta x)^3 + \ldots (n\Delta x)^2]\Delta x = (1 + 2^2 + 3^2 + \ldots n^2)(\Delta x)^3 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3}(\Delta x)^3 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3}\frac{x^3}{n^3}$ giver $\frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{2n} + \frac{x^3}{6n^2}$ paa Grund af Discretionen: giver $\int_0^x x^2\,dx = [(dx)^2 + (2\,dx)^2 + \ldots (ndx)^2]\,dx = (1 + 2^2 + 3^2 + \ldots n^2)\,dx^3 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3}\cdot\frac{x^3}{n} = \text{Lim}\,\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)x^3}{1.2.3}$ derimod $\frac{x^3}{3}$ paa Grund af Continuiteten. Til $\Sigma_0^x x^3\Delta x = [\Delta x^3 + (2\Delta x)^3 + \ldots (n\Delta x)^3]\,\Delta x = (1 + 2^3 + \ldots n^3)(\Delta x)^4 = (1 + 2 + 3 + \ldots n)^2(\Delta x)^4$ svarer $\frac{n^2(1+n)^2}{2^2}\frac{x^4}{n^4} = \frac{x^4}{4} + \frac{x^4}{2n} + \frac{x^4}{4n^2}$, efterdi n er

endelig; til $\int_0^x x^3\, dx = [dx^3 + (2\,dx)^3 + \ldots (n\,dx)^3]\, dx = (1 + 2^3 + \ldots\ldots n^3)\, dx^4 = (1 + 2 + 3 + \ldots\ldots n)^2\, dx^4$.

svarer derimod $\frac{n^2\,(1+n)^2}{2^2}\,\frac{x^4}{n^4} = \text{Lim}\,\frac{\left(\frac{1}{n}+1\right)^2}{4}\,x^4 = \frac{x^4}{4}$;

o. s. v.

I den uendelige Summation tydeliggjøres, hvad allerede tidligere (II., γ) er paapeget, det Endeliges og det Uendeliges dialektiske Eenhed. Den Sætning, at en Størrelse bestaaer af et uendeligt Antal uendelig smaae Dele har da i sig et ikke blot ligesaa rigt, men endog rigere Anlæg til articulerende Bestemmelser, end den Sætning, at den endelige Størrelse bestaaer af et endeligt Antal endelige Dele. Elementerne dx, xdx, x^2dx o.s.v. ere i Forhold til de paagjældende Størrelser x, $\frac{x^2}{2}$, $\frac{x^3}{3}$... ligesaa eiendommelig bestemte, som en hvilkensomhelst endelig Deel Δx, $n\Delta x$ ..., i Forhold til det tilsvarende endelige Hele. Saalænge Forstanden søger al Forskjel og al Bestemthed i det Endelige, kan den vel behandle Størrelserne som Led i en omfattende Operationsmechanik, men den er ikke istand til at fatte, hvad Størrelse egentlig er, ikke istand til at erkjende Størrelsens Væsen. Til en Erkjendelse af Størrelsens Væsen udfordres en Erkjendelse af dens Oprindelse, dens Vorden og Forsvinden, dens Opløsning i sit Moment, dens Fremgang af sit Element.

β) Integrationsprinciper: afledede Functioners Forhold til de oprindelige.

Den uendelige Summation kan ikke ligefrem udføres; for at afgive Analogier, som ovenstaaende, maa allerede den endelige Summation undergaae en saa væsentlig Forvandling, at den ikke længere beroer paa simpel Addition. Den uende-

lige Summation bestemmes ved Forholdet mellem Element og Størrelse; men dette Forhold bestemmes igjen, idet det fuldstændige Størrelsesbegreb falder sammen med Functionsbegrebet, ved Forholdet mellem den afledede Function og den tilsvarende oprindelige. Som Element er det paagjældende Differential: $d f(x) = dy$ et Produkt af den afledede Function, Differentialcoefficienten $f'(x)$, og det Moment, $dx = dx$, hvorved den Uafhængige varierer. Forsaavidt Størrelsen er en Function af sig selv og Enheden: $f(x) = x$, og $dx = d f(x) = f'(x)\,dx = dy$, er her imellem Moment og Element kun den formelle Forskjel, at dx som et Differentieringsudtryk er Moment, som Integrationens reale Mulighed derimod Element. I væsentlig bestemte Functioner har Forskjellen væsentlig Betydning; saaledes er i $f(x + dx) = (x + dx)^2 = y + dy$ Differentialet dx kun Moment, Differentialet $dy = d f(x) = f'(x)\,dx$ derimod det egentlige Element.

Fra Forskjellen mellem Moment og Element faaer Integrationen først i Begrebet en alsidig Belysning. Opfattes $\int_0^x d f(x) = \int_0^x f'(x)\,dx$ som Summen af de uendelig mange Led, der fremkommer, idet x i $f'(x)\,dx$ continuerlig gjennemløber Værdierne fra 0 til x, da vil denne Sum ifølge Beskaffenheden af $f'(x)\,dx$, d. e. ifølge Elementets Beskaffenhed, give, for $f(x) = x$, Summen: $dx + dx + \ldots = x$; for $f(x) = x^2$, Summen: $\int_0^x d(x^2) = \int_0^x f'(x)\,dx = \int_0^x 2x\,dx$ $= 2\int_0^x x\,dx = 2\,(1 + 2 + 3 + \ldots.\, n)\,dx^2 = \text{Lim}\,2\frac{x^2}{n^2}$ $(1 + 2 + 3 + \ldots.\, n) = \text{Lim}\,2\,\frac{(n + 1)}{1.2}\,x^2 = \text{Lim}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ $x^2 = x^2$, o. s. v. Er det nu heraf indlysende, hvorledes den uendelige Summation forvandler sig til Integration, idet Integrationen, derved at Eftertrykket falder paa Elementet $f'(x)\,dx$, og følgelig paa $f'(x)$, principielt løser sin Opgave

at gaae fra Differentialet tilbage til Integralet, fra den afledede Function tilbage til den oprindelige: da vil det nu ogsaa kunne vise sig, hvori Forskjellen mellem endelig og uendelig Summation væsentlig er begrundet.

Tillægges Udtrykket $(x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2$ geometrisk Betydning, da sees det, at alle Leddene ere comparable, forsaavidt de alle betegne Arealer; men forandres nu Δx til dx, da giver $(x + dx)^2 = x^2 + 2xdx + dx^2$ incomparable Led, idet x^2 er et Areal, xdx Arealets Element og dx^2 Elementets Moment. Hvad Legemsformen angaaer, vil $(x + \Delta x)^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$ give comparable Led, nemlig lutter Legemer; medens $(x + dx)^3 = x^3 + 3x^2dx + 3xdx^2 + dx^3$ derimod giver incomparable Led, da x^3 jo er et Legeme, x^2dx en Flade, xdx^2 en Linie og dx^3 et Punkt. Stilles nu den Opgave at bestemme Størrelsen af den Tilvæxt et Areal, a^2, faaer, ved at summere de Tilvæxter, dette Areal erholder, idet x fra den endelige Værdi a, ved Gjentagelse af Tilvæxten Δx, har naaet Værdien b; da ligger det i Sagens Natur, at den endelige Summation maa i hver Addend have alle Tilvæxtens Led, saa at Summen bliver $\sum\limits_{x=a}^{x=b}[2x\Delta x + (\Delta x)^2]$, ikke $\sum\limits_{x=a}^{x=b}2x\Delta x$. Er det derimod Opgaven at summere de Tilvæxter, Arealet a^2 erholder, idet $x = a$ ved Tilvæxter af $dx = dx$ er voxet indtil $x = b$; da maa den uendelige Summation udelukkende holde sig til Arealets Element, saa at Summen bliver: $\int\limits_{x=a}^{x=b}2x\,dx$, ikke $\int\limits_{x=b}^{x=b}(2x\,dx + dx^2)$. [1]) At Elementets Moment

---

[1]) $\int_a^b(2x\,dx + dx^2) = 2a\,n\,dx + n^2dx^2$, hvor $n = \frac{b - a}{dx}$, altsaa $\int_a^b(2xdx + dx^2) = 2a(b - a) + (b - a)^2 = b^2 - a^2$. Hvorimod

bortfalder, er jo ligefrem begrundet deri, at et Moment, der allerede er indeholdt i Elementet selv, ikke kan faae særlig Betydning.[1])

$\int_a^b 2x\,dx = 2an\,dx + n^2dx^2 - n\,dx^2 = b^2 - a^2 - (b-a)dx$. Ville vi nu see denne Differens under Synspunktet af „Feilenes Compensation" (jvfr. III., b, γ); da have vi ved at udelade dx^2 af dy virkelig begaaet en Feil, men denne Feil bliver saa igjen compenseret derved, at vi i $\int_a^b 2x\,dx = b^2 - a^2$ udelade det negative Led $\div (b-a)\,dx$. Den væsentlige Grund, hvorfor $(b-a)\,dx$ udelades er imidlertid den, at her ved dette Udtryk kun betegnes en Linie, ikke et Areal.

[1]) Hvorledes en Tænker, som G. Berkeley t. Ex. har famlet efter en Begrebsbestemmelse, hvori Forholdet mellem Moment, Element og endelig Størrelse kunde fastholdes, sees blandt Andet af Følgende: Because there is no Number of Parts so great, but it is possible there may be a Line containing more, the Inchline is said to contain Parts more than any assignable Number; which is true, not of the Inch taken absolutely, but only for the Things signified by it. But Men not retaining that Distinction in their Thoughts, slide into a belief that the small particular Line described on Paper contains in it self Parts innumerable. There is no such thing as the ten-thousandth Part of an Inch; but there is of a Mile or Diamether of the Earth, which may be signified by that Inch. When therefore I delineate a Triangle on Paper, and take one side not above an Inch, for Example, in length to be the Radius: This I consider as divided into ten thousand or an hundred thousand Parts, or more. For though the ten-thousandth Part of that Line considered in it self, is nothing at all, and consequently may be neglected without any Error or Inconveniency; yet these described Lines being only Marks standing for greater Quantities, whereof it may be the ten-thousandth Part is very considerable, it follows, that to prevent notable Errors in Practice, the Radius must be taken of ten thousand Parts, or more. Principles of human knowledge. Lond. 1734. S. 147—148.

Som Arealets Element er $x\,dx$ en dialektisk Mellembestemmelse af Linie og Flade, som Elementets Moment er dx^2 en dialektisk Mellembestemmelse af Anlæg til en Linies og til en Flades Anlæg. I den geometriske Opfattelse af x^3, hvortil svarer $\int_0^x 3x^3 dx$, ikke $\int_0^x (3x^2dx + 3x\,dx^2 + dx^3)$, sees, hvad $(x + dx)^3$ angaaer, ikke blot i x^3 et Legeme, i $x^2 dx$ et Anlæg til et Legeme: den egentlige Flade, i $x\,dx^2$ Anlæg til et legemligt Anlæg: den legemlige Linie, men endog i dx^3 et Anlæg til det legemlige Anlægs Anlæg: det legemlige Punkt.

Den gamle dialektiske Strid angaaende Punktets, Liniens, Fladens og Legemets indbyrdes Forhold: om det nemlig er Punktet, der er det Oprindelige, saa at Punktet frembringer Linien, Linien Fladen, Fladen Legemet; eller det maaskee omvendt er Legemet, der er det Oprindelige, saa at Fladen ved Abstraction afledes af Legemet, Linien af Fladen, Punktet af Linien[1]), — dette Problem finder først sin Løsning, naar Integrationens Principer alsidig opklares.

---

[1]) I sin Metaphysik (Metaphys. III. 5) har Aristoteles behandlet det Spørgsmaal, om Tallene, Legemerne, Fladerne og Punkterne ere Væsenheder (*οὐσίαι τινὲς*), eller ikke. „I Sammenligning med de Ting, man vel meest maatte tillægge Væsenhed, saasom: Vand, Jord og Luft, hvoraf de sammensatte Legemer bestaae, ere Varme og Kulde og lignende Beskaffenheder (*πάθη*, Affectioner) jo ikke Væsenheder; kun Legemet, der har disse Affectioner, forbliver som et Værende, en Væsenhed (*ὡς ὄν τι καὶ οὐσία τις οὖσα*). Og dog synes Legemet at have mindre Væsenhed end Overfladen, denne mindre end Linien, og Linien mindre end Eenheden og Punktet. Thi ved disse er Legemet begrændset, og det synes, som kunde disse vel bestaae uden Legemet, men Legemet derimod umuligt uden dem. Indrømmer man imidlertid, at Linierne og Punkterne have mere Væsenhed end Legemerne, kommer man i Forlegenhed; thi disse Grændsebestemmelser beroe jo øiensynlig paa Delinger af Legemet (*διαιρέσεις ὄντα τοῦ σώματος*) deels i Breden, deels i Dybden, deels i Længden. Desuden

At det mathematiske Punkt ikke ved nogen Bevægelse kan frembringe en Linie, eller den mathematiske Linie en Flade, eller den mathematiske Flade et Legeme, sees deraf, at Liniens Element dx, for at svare til det mathematiske Punkt, maa være 0; men naar $dx = 0$ ikke kan integreres til Linie, saa kan $xdx = x.0 = 0$ heller ikke integreres til Flade, og $x^2dx = x^2.0 = 0$ da heller ikke integreres til Legeme. I Modsætning til det mathematiske Punkt er altsaa den endelige Legemsform det Oprindelige. Men denne Legemsform maa dog, naar vi see paa det i væsentlig Forstand Oprindelige, ikke destomindre opfattes som det Afledede, thi Alt, hvad der beroer paa Vorden og Tilbliven, er jo et Afledet. Den endelige Legemsform har som et Afledet, x^3, sin Tilbliven, idet den fremkommer ved Integration af den legemlige Flade, x^2dx, denne ved Integration

---

maa enten enhver Form indeholdes i Legemet, eller ingen: dersom altsaa Hermes ikke er i Stenen, og Tærningens Halvdeel ikke findes afgrændset i Tærningen selv, saa vil Overfladen heller ikke findes heri; thi dersom nogen Overflade fandtes i Tærningen, maatte ogsaa den findes, hvorved Tærningen halveres. Det Samme gjælder om Linien, Punktet og Enheden. Til de anførte Urimeligheder (ἄλογα) kommer endnu den, der angaaer Opstaaen og Forgaaen; thi snart blive tvende Overflader til een, naar nemlig to Legemer berøre hinanden, snart bliver der igjen, naar et Legeme deles, tvende Overflader, hvor der før ingen var: en tilværende Overflade kan altsaa forsvinde, og en forhen ikke tilværende fremkomme, alt eftersom Legmerne forenes, eller adskilles. Det synes da saaledes, som om Punkter, Linier og Flader, dersom de vare Væsenheder, maatte vexle mellem at existere og ikke at existere; men Punkter, Linier og Flader kunne hverken vorde eller forgaae, ihvorvel de snart ere, snart ikke ere."

Denne hele Aporie, hvori Aristoteles ikke saameget oplyser Tingen, som sætter den paa Skruer, har her sit Knudepunkt, ikke i det Intellectuelles Forhold til det Materielle, men i det Spørgsmaal: hvad er det Oprindelige, det i sig Gyldige, enten det Abstracte eller det Concrete?

af den legemlige Linie, xdx^2, denne ved Integration af det legemlige Punkt, dx^3. Dette legemlige Punkt, Elementernes Element, er altsaa her det ikke Afledede, det i sig Oprindelige, Legemlighedens Princip, ikke en tom Abstraction, men et Totalitetens Anlæg [1]), det Punkt, der in concreto svarer til sit Begreb.

Hvad de enkelte Functioner i Almindelighed angaaer, kan man nu kjende Integrationens Rigtighed derpaa, at man ved at differentiere det fundne Integral erholder det oprindelige Differential, ligesom man, hvad Subtractionen angaaer, kan kjende Differensen derpaa, at den adderet til Subtrahenten giver Minuenden. Saaledes er t. Ex. $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + c$, efterdi $d\left(\frac{x^{m+1}}{m+1} + c\right) = x^m dx$; her er i de forskjellige Principer væsentlig kun eet Princip. Men, medens man af en given oprindelig Function altid kan finde den afledede, er det derimod ikke altid muligt, naar en Function er given som Differentialcoefficient, at finde en tilsvarende oprindelig. Vistnok kan man, for at anføre et et Exempel, omdanne $\int \frac{x^m dx}{l(x)^n}$ til $-\frac{x^{m+1}}{(n-1)(lx)^{n-1}} + \frac{m+1}{n-1}\int \frac{x^m dx}{lx^{n-1}} \ldots$, men under fortsat Anvendelse af denne Formel standser man tilsidst ved $\int \frac{x^m dx}{l.x}$, som i Alminde-

---

[1]) Naar dx^3, fastholdt i reen mathematisk Form, ikke desto mindre tager sig ud som en tom Abstraction, hvori man ikke kan søge et Princip, da er Grunden denne, at det saaledes bestemte Punkt, uagtet det er den extensive Størrelses principielle Anlæg, ikke kan faae Realitet, uden med det Samme at betegne et Anlæg til intensiv Størrelse; men Læren om det Intensive falder, forsaavidt den intensive Størrelse altid er mere end Størrelse, udenfor det abstract Mathematiske.

lighed ($m \lesseqgtr -1$) ikke kan integreres, forbi der ikke gives nogen bekjendt Function, hvis Differentialcoefficient er $\frac{x^m}{l.\,x}$ [1]).

γ) Det bestemte Integral: Uendelighedsproblemets Løsning.

Endskjøndt man ikke kan integrere enhver Function under endelig Form, kan man dog til enhver Function finde et Differential, og følgelig betragte enhver endelig Størrelse som et Integral. Da Integralet nemlig er en Function af deri indeholdte Variable, $\int_0^x \Phi(x)\,dx = f(x)$, kan man i Almindelighed sætte: $f_1(x) = 2$, $f_2(x) = 3$, $f_3(x) = 4 \ldots$, og bestemme x saaledes, at enhver af disse Ligninger, selv om man kun ved Tilnærmelse kan angive Talværdien af x, er tilfredsstillet, og paa denne Maade erholde: $\int_0^x \Phi_1(x)dx = 2$, $\int_0^x \Phi_2(x)\,dx = 3$, $\int_0^x \Phi_3(x)\,dx = 4 \ldots$

Det articulerende Vexelforhold af Uendeligt med Endeligt fremlyser af den Maade, hvorpaa det bestemte Integral angives; thi ihvorvel den endelige Størrelse, hvad Værdien angaaer, er sig selv lig, ad hvilken Vei vi end komme til den, saa gjør det dog i Begrebet en uendelig Forskjel, om en saadan Størrelse haves som umiddelbart given, eller fremkommer ved Integration.

I Integrationen har Størrelsen sin Vorden; for at denne Vorden kan ende med Tilværen, maa Integralet „tages imellem bestemte Grændser." Fordringen paa bestemte Grændser betegnes umiddelbart derved, at der til Differentialfunctionens almindelige Integral føies „en vilkaarlig Constant." Forsaavidt en saadan Constant uden

---

[1]) Jvfr. Jürgensen. Begyndelsesgr. S. 75—77.

videre tilføies, kan man, naar det kun gjælder om at vise det heri Tilladelige, jo vistnok beraabe sig paa den Omstændighed, at, efterdi $d. c = 0$, naar c er constant, og følgelig $d(f(x) + c) = f'(x)dx$, vil man, naar Integrationen foretages, erholde $\int f'(x)dx = f(x) + c$, og saaledes faae den Constante med; men Hovedsagen er, at man indseer, ikke blot det Tilladelige, men det Nødvendige i, at Constanten tilføies.

I det Endeliges Analyse, hvor hver Størrelse, hvorledes den end iøvrigt fremkommer, kan tages for sig, opfattes som tilværende, og forsaavidt tillægges en vilkaarlig Værdi, kan en særlig Indførelse af vilkaarlige Constanter ikke spille nogen Hovedrolle;[1]) i det Uendeliges Analyse danner den vilkaarlige Constant derimod en charakteristisk Modsætning til den uendelig variable Størrelse. Udtrykkes

---

[1]) I Differensregningen, hvor den ved endelige Mellemrum varierende Størrelse danner Modsætningen til den constante, vil Integralet med Hensyn hertil allerede kræve Tilføining af en Constant. „Ethvert Integral indeholder en Ubestemthed, saalænge den ikke er hævet ved nærmere Betingelser. Dette ligger deri, at $\Delta. (s_n + c) = \Delta. s_n = u_n$, idet c er en vilkaarlig Constant, og altsaa kan man have $s_n + c = \Sigma. u_n$. Til ethvert Integral kan derfor føies en vilkaarlig Constant, hvis Bestemmelse afhænger af Betingelser, der nærmere maae angives. Derfor er $\Sigma. x^n = \frac{x^n}{x-1} + c$. Vil man ved $\Sigma. x^n$ forstaae Summen af Leddene $1, x, x^2 : .. x^{n-1}$, saa maa til $n = 0$ svare $\Sigma. x^0 = 0$, altsaa: $0 = \frac{1}{x-1} + c$, hvoraf $c = -\frac{1}{x-1}$, følgelig $\Sigma. x^n = \frac{x^n - 1}{x - 1}$, som er bekjendt, og stemmer med Formlen for Summen af en Qvotientrækkes Led." A. Steen. Reen Mathem. S. 340—341.

Just forbi Differensen hæver Constanten, maa Integralet fordre den tilbage; just forbi $s_{n+1} + c - (s_n + c) = s_{n+1} - s_n$, maa $\Sigma u_n = \Sigma \Delta. s_n$ udtrykkelig sættes, ikke som s_n, men som $s_n + c$; thi c, der, idet $c - c = 0$, ikke vedkommer $\Delta. s_n$, vedkommer derimod, efterdi $s_n + c$, for sig taget, tillige afhænger af c, det til $\Delta. s_n$ svarende Integral.

t. Ex. den constante Hastighed, v, ved $\frac{s}{t} = a$, saa bliver naturligviis $s = vt = at$. Da t selv i dette Udtryk opfattes som endelig vilkaarlig Størrelse, vilde Tilføiningen af en vilkaarlig Constant ikke blot være overflødig, men endog utilladelig; thi dersom $\frac{s}{t} = a$, kan deraf umulig følge $s = at + c$, med mindre man da ved at sætte $c = 0$ gjør Tilsætningen til et Spilfægteri. Anderledes, naar s skal bestemmes ved $\int adt = at$; thi i denne Fremstilling er t ikke vilkaarlig, men uendelig variabel, har endnu ingen endelig bestemt Værdi, er, med andre Ord, ikke i Tilværen, men i Vorden. At sætte denne Vorden en Grændse ved at angive et Slutningspunkt, uden tillige at angive et tilsvarende Begyndelsespunkt, er ligesaa utilstrækkeligt, som det til Angivelsen af, hvor langt En er reist, er utilstrækkeligt at anføre, at han er reist til Kjøbenhavn, naar man har glemt at anføre, hvorfra hans Reise gik ud; Vordens, Forandringens, i vort Exempel: Bevægelsens Udgangspunkt angives ved Constanten. For at bestemme s ved $\int adt$, maa Udtrykket blive: $s = \int adt = at + c$, thi ved at sætte $t = 0$, erholder man da i c den Grændse, hvorfra Bevægelsen skal regnes. Er c endelig, saa er her en endelig Afstand imellem et forudgivet Punkt og det for Bevægelsen fastsatte Begyndelsespunkt; er $c = 0$, falde disse to Punkter sammen.

De for den bestemmende Integration nødvendige Grændsebestemmelser danne fremdeles en charakteristisk Modsætning til de Grændsebestemmelser, der fremkomme ved Differentiationen. For $f(x) = x^2$ er $d. f(x) = d. x^2 = f'(x)\,dx = 2\,xdx$ en væsentlig Grændse; thi, geometrisk seet, er xdx som Moment en Linie, og Linien er Fladens Grændse: den Grændse, hvortil Differentiationen fører, er, som vi have seet, i Forhold til det Begrændsede et Moment, et Anlæg,

et Element. Den Grændse, hvorved Integralet bestemmes, er derimod, naar den da ikke fastholdes i den rene Abstraction som 0 eller ∞, aldrig et blot Moment eller en blot Mulighed, men altid en tilværende endelig Størrelse, og i denne sin Endelighed sideordnet med det derved bestemte Integral. Saaledes idet $\int dx = x + c$, $\int 2\,x\,dx = x^2 + c$, $\int 3\,x^2 dx = x^3 + c$, er c en Linie, naar x er en Linie, et Areal, nar x^2 er et Areal, et Volumen, naar x^3 er et Volumen. Den tilføiede Constante, som, hvad Værdien angaaer, er vilkaarlig, er altsaa hvad Størrelsens Art og Beskaffenhed angaaer, ingenlunde vilkaarlig. At Constanten maa være eensartet med Integralet, sees udtrykkelig, naar den opfattes som en Function af Integralets Variable, hørende med til Integralets Bestemthed, og derved viser sig som væsentlig Deel af Integralet selv. Betegnes $\int 2\,x\,dx$ ved $\int f'(x)\,dx + c = f(x = b) - f(x = a)$ $= \int_{x=a}^{x=b} 2\,x\,dx = b^2 - a^2$; da har $c = -f(x = a) = -f(a)$ opgivet sin Umiddelbarhed, og er som en Functionens Grændse forvandlet til en reflecteret Grændsebestemmelse.

Er nu Grændsebestemmelsen reflecteret i Functionen, saa indsees tillige heraf, at man, istedetfor at sætte $\int_{x=a}^{x=b} 2\,x\,dx$ $= \int 2\,b\,dx - \int 2\,a\,dx$, hvad her, eftersom x er variabel, vilde være aldeles meningsløst, først maa udføre Integrationen, for derefter i Udtrykket: $\int 2\,x\,dx = x^2$ at kunne tillægge x de vilkaarlige Værdier: b og a. Forsaavidt den endelig bestemte Størrelse da paa denne Maade fremstilles som et bestemt Integral, er Vexelbestemmelsen af Endeligt og Uendeligt articuleret i objectiv Reflexion. I og med enhver endelig Størrelse bliver altsaa det Uendelige sat; thi enhver endelig

Størrelse er, naar den sees i Begrebet, en Determination af det Uendelige, et definitivt Udtryk for $\infty . 0$.

Idet Integralet bestemmes saaledes, at de deri reflecterede Grændser selv maae betragtes som Integraler, kan Uendelighedsproblemet siges at være løst; thi medens Differentialet viser det Uendeliges Oprindelse af det Endelige, viser Integralet omvendt det Endeliges Oprindelse af det Uendelige. Kun det Uendeliges Analyse, saaledes som Mathematiken gjennemfører den, kan altsaa lede til Problemets Løsning; men Løsningen selv er, væsentlig seet, ikke mathematisk: det er ikke en vanskelig Beregning, ikke en indviklet Operationsmechanik, men en dialektisk Begrebsudvikling, hvorpaa det i sidste Instans kommer an.

Slutning.

Kan nu den i dette Skrift angivne Løsning af Uendelighedsproblemet i nogen Grad bestaae sin videnskabelige Prøve, da vil det heller ikke være vanskeligt at godtgjøre, at en Dialektik, hvori Analysens exacte Elementer indgaae, er for Philosophien af væsentlig formel, og just derved af sand og reel Interesse.

Allerede i den ældre græske Philosophie opkomme, navnlig hos Eleaterne, saadanne dialektiske Qvantitetsproblemer, som, efterat de igjennem Aarhundreder ere bearbeidede selv af de meest fremragende Tænkere, dog først i den nærværende Tid, ved nemlig at sees under den høiere Analyses Synspunkt, kunne finde deres fuldstændige Løsning. Idet vi i denne Sammenhæng særlig fremhæve Delings- og Bevægelsesproblemet, kunne vi slutte med at minde om, hvorledes de forskjellige herhen hørende Overveielser alle tilsidst indgaae under det ene omfattende, for Philosophien først

og sidst afgjørende Problem, nemlig: Idealitetsproblemet.

a) Delingsproblemet.

De bekjendte Indsigelser, Eleaten Zeno har reist imod Muligheden af, at en Fleerhed i det Værende skulde lade sig tænke, har Zeller [1]) sammendraget og fremstillet i følgende Vendinger:

„Dersom det Værende var et Mangfoldigt, saa maatte det paa een Gang være baade uendelig lidet og uendelig stort. Uendelig lidet, thi da enhver Fleerhed er et Antal af Eenheder, men kun det Udeelbare er en virkelig Eenhed, saa maa enhver af de Mange enten selv være en udeelbar Eenhed, eller bestaae af saadanne Eenheder. Men hvad der er udeelbart, kan ikke have nogen Størrelse, thi alt, hvad der har en Størrelse, er deelbart i det Uendelige. De enkelte Dele, hvoraf det Mangfoldige bestaaer, have altsaa ingen Størrelse. Der er altsaa Intet, der kan blive større derved, at slige Dele tilføies det, og Intet, der kan blive mindre derved, at de fradrages det. Men hvad der, naar det føies til et Andet, ikke forstørrer det, og derved at det fradrages, ikke formindsker det, det er Intet. Det Mangfoldige er altsaa uendelig lidet, thi enhver af dets Bestanddele er saa liden, at den er et Intet. Men paa den anden Side maae disse Dele ogsaa være uendelig store. Thi da det, som ingen Størrelse har, ikke er, saa maae de Mange, for at være, have en Størrelse, deres Dele maae altsaa være adskilte fra hverandre. Ligeledes maa ogsaa det, der fjerner dem fra hverandre, have en Størrelse, og det, som igjen fjerner dette fra dem, ligeledes, og saa fremdeles i det Uendelige, saa at vi ifølge heraf erholde uendelig mange Størrelser eller en Uendelighed af Størrelser". „Ved en lignende Betragtningsmaade viser Zeno, at det Mangfol-

[1]) Die Philosophie der Griechen. 1ster Th. Tübingen 1856. S. 425—28.

dige, hvad Tallet angaaer, maa være baade begrændset og ubegrændset .... Ligesom ved det første Beviis Bestemmelsen af den uendelige Størrelse, saaledes bliver her Bestemmelsen af det uendelige Tal vundet derved, at Mangfoldigheden opfattes som en Fleerhed af adskilte Størrelser, og at der mellem hvert Par Adskilte indskydes et tredie Adskillende. De Gamle pleiede desaarsag at betegne denne Deel af begge Beviser som Beviset af Tvedelingen."

Pointen er her opfattet saa skarpt og Knuden knyttet saa fast, at hverken en Platos Dialektik eller en Aristoteles's Analytik var istand til at løse Problemet. Hvad der hos Grækerne maatte endog i almeenlogisk Henseende vanskeliggjøre Løsningen af Uendelighedsproblemet, var den bekjendte gjennem hele den græske Philosophie gaaende Adskillelse af det Begrændsede (*πέρας, πεπερασμένον*) og det Ubegrændsede (*ἄπειρον*), en Adskillelse, ifølge hvilken det Begrændsede var Eet med det Fornuftige, det Ubegrændsede derimod med det Ufornuftige, det Ubestemmelige, det i sig Utænkelige (*ἄλογον*).[1])

---

[1]) Den aristoteliske Synsmaade, der (jvfr. t. Ex. Phys. III. V. VI.) i det Hele taget løber ud paa, at det Uendelige ikke er i Virkeligheden, men kun efter Muligheden, er en Fornegtelse af det Uendeliges Realitet: *Ὅτι δὲ εἰ μή. ἔστιν ἄπειρον ἁπλῶς, πολλὰ ἀδύνατα συμβαίνει, δῆλον. τοῦ τὲ γὰρ χρόνου ἔσται τὶς ἀρχὴ καὶ τελευτή. καὶ τὰ μεγέθη οὐ διαιρετὰ εἰς μέγεθος, καὶ ἀριθμὸς οὐκ ἔσται ἄπειρος .... καὶ δῆλον ὅτι πῶς μὲν ἔστι, πώς δ᾽ οὐ. Λέγεται δέ τὸ εἶναι, τὸ μὲν δυνάμει, τὸ δὲ ἐντελεχείᾳ ... Λείπεται οὖν δυνάμει εἶναι τὸ ἄπειρον.* Phys. III. 6. Idet det Uendelige paa denne Maade holdes i den blotte Mulighed, altsaa i en Mulighed, der aldrig kan blive til Virkelighed, bliver det et Umuligt.

Det Ubegrændsede, som hos Grækerne betegnede det Laveste, Materien, forvandledes i den middelalderlige Speculation til det Høieste, det Uendelige, som da igjen blev, om end ikke i orientalsk Forstand, et Udtryk for den fuldkomne, guddommelige Væren. Som Den, der har bragt den absolut uendelige Eenhed i Forhold til Tallet og det Mangfoldige, maae vi her nævne Cardinalen Nicolaus af Cusa († 1464); han har i sine tre Bøger De docta ignorantia angivet følgende Synsmaade: „Den i Sandhed uende-

Med Newtons Fluxionsmethode og Leibnitzes Differentialregning gjør den nyere Tid forsaavidt et i Forhold til Oldtiden betydeligt Fremskridt, som Hensynet til det Uendelige, hvorledes man saa end for Resten opfatter det, fra nu af viser sig stedse mere paatrængende. Idet Delingsproblemet gik over i den høiere Analyse, begyndte det Dialektiske at røre sig i den exacte Videnskab; hvor betegnende er ikke

---

lige Væren kan ikke have nogen anden Væren udenfor sig, der var istand til at danne en virkelig Modsætning, thi derved vilde den fuldkomne Væren blive begrændset; den uendelige Væren er den absolute Selvlighed (absoluta identitas), alle Formers Form, alle Mulighebers Virkelighed. Da nu det absolut Største er Eet, saa kan det, der er istand til et Mere eller et Mindre kun være en Fleerhed, altsaa kun være i Tallet. Saaledes er den uendelige Eenhed som det absolut Mindste alle Tals Grund og Begyndelse, og som det absolut Største alle Tals Ende og Grændse."

Maximum, quo majus esse nequit, simpliciter et absolute, cum majus sit, quam comprehendi per nos possit, quia est veritas infinita: non aliter quam incomprehensibiliter attingimus. Nam cum non sit de natura eorum, quæ excedens admittunt et excessum, super omne id est, quod per nos concipi potest: omnia enim quæcunque sensu, ratione aut intellectu apprehenduntur, inter se et ad invicem taliter differunt, quod nulla est æqualitas præcisa inter illa. Excedit igitur maxima æqualitas, quæ a nullo est alia aut diversa, omnem intellectum: quare maximum absolute, cum sit omne id quod esse potest, est penitus in actu, et sicut non potest majus esse, eadem ratione nec minus, cum sit omne id, quod esse potest. Minimum autem est, quo minus esse non potest. Et quoniam maximum est hujusmodi, manifestum est minimum maximo coincidere. Et hoc tibi clarius fit, si ad quantitatem maximum et minimum contrahis. Maxima enim quantitas est maxime magna. Minima quantitas est maxime parva. Absolve igitur a quantitate maximum et minimum, subtrahendo intellectualiter magnum et parvum: & clare conspicis, maximum et minimum coincidere. D. Nicolai de Cusa Cardinalis opera. Basiliæ. De docta ignorantia. Lib. I. cap. IV.

Denne Identitet af et Begrændset-Ubegrændset, et uendeligt og dog absolut Maximum, et uendeligt og dog absolut Minimum blev i det 16de Aarhundrede videre udviklet af G. Bruno.

i denne Henseende Saveriens af Maclaurin anførte Ord: »on vit alors pour la premiere fois des disputes parmi les Géometres«! Mathematikeren driver de exacte Analyser til de yderste Grændser, og seer saa til sin ubehagelige Overraskelse Dialektiken bryde frem.[1]) Det 17de og tildeels det 18de Aarhundredes Philosophie var imidlertid, forsaavidt den da ikke var aldeles skeptisk, saa fixeret i Dogmatisme, at Bevidstheden om det Dialektiske, endog hos Tænkere som Spinoza og Leibnitz, blev aldeles tilbagetrængt. Intet Under da, at Begreberne for en Spinoza chrystalliserede i exacte Definitioner[2]), intet Under, at en Leibnitz med alt sit Genie

---

[1]) Nous supposons que la soudivision d'un Etre peut se continuer a l'infini, & dès que cette soudivision devient telle, que nous ne pouvons plus la saisir, nous regardons comme nul, le reste de cet Etre infiniment petit, quoique nous voulions qu' il y ait encore dans lui une division infinie, & que nous égalons néanmoins à zero. Cela est admirable: nous voulons concevoir l'infini, & connoître cet infini par le fini même. Cette contrarieté vient de ce que nous ne savons au juste ce que c'est que l'infini. Dire qu'une chose est infinie, c'est dire que nous n'y connoissons pas de terme; et dès-lors nous devons rejetter tout ce qui sembleroit supposer en nous cette connoissance. Saverien Histoire du Calc. p. XVII.—XIX.

Selv Lacroix, der dog i sin Traité du Calcul différentiel et intégral. Tom. I. Paris 1810 ikke indlader sig videre paa, hvad han kalder le changement de métaphysique, kan dog alligevel ikke afholde sig fra Sidehug til dette drillende Begreb, dette lille dialektiske Utyske, cet être infiniment petit! Saaledes i anf. Skr. S. 242. En partageant avec toute l'Europe, le respect attaché au nom et aux travaux de M. Lagrange, j'oserai néanmoins n'être pas de l'avis de cet homme si justement célèbre, sur les motifs qui paraissent le porter à introduire une nouvelle manière d'écrire les résultats du calcul différentiel; car je crois qu'il est facile de prouver que l'ancienne n'a point en elle même l'inconvénient de rappeler continuellement l'idée fausse des infiniment petits.

[2]) Jvfr. Benedict Spinoza, af Dr. H. Brøchner. Kbhn. 1857. S. 44—58 o. fl. Stdr.

ikke var istand til at begribe som Philosoph, hvad han selv opdagede som Mathematiker; intet Under, at en Wolf kunde hylde den mathematiske Methode som Forbillede for den philosophiske, medens en Berkeley [1]) netop i den Modsigelse, der ligger i den uendelige Deelbarhed, meente at see en bundløs Urimelighed, et Middel til at bortforklare Materiens Realitet.

Uagtet den dogmatiske og skeptiske Philosophie imod Slutningen af det 18de Aarhundrede mere og mere fortrængtes af den kritiske, var dog i Henseende til Problemets Løsning saa godt som Intet vundet, da Tænkningen, trods dens forandrede Stilling til Væren, endnu blev staaende ved det

[1]) A. Treatise concerning the Principles of Human Knowledge. London 1734. S. 146. He whose Understanding is prepossest with the Doctrine of abstract general Ideas may be persuaded, that (whatever be thought of the Ideas of Sense) Extension in abstract is infinitely divisible. And one who thinks the Objects of Sense exist without the Mind, will perhaps in virtue therfore be brought to admit, that a Line but an Inch long may contain innumerable Parts really existing, though too small to be discerned. These Errors are grafted as well in the Minds of Geometricians, as of other Men, and have a like influence on their Reasonings .... S. 150: Of late the Speculations about Infinites have run so high, and grown to such strange Notions, as have occasioned no small Scruples and Disputes among the Geometers of the present Age.

If it be said that several Theoremes undoubtedly true, are discovered by Methods in which Infinitesimals are made use of, which could never have been, if their Existence included a Contradiction in it. I answer, that upon a thorough Examination it will not be found, that in any Instance it is necessary to make use of or conceive infinitesimal Parts of finit Lines, or even Quantities less than the Minimum Sensibile: Nay, it will be evident this is never done, it being impossible. ... Particularly, Matter or the absolute Existence of Corporeal Objects, hath been shewn to be that wherein the most avowed and pernicious Enemies of all Knowlegde, whetever humane or divine, have ever placed their chief Strength and Confidence. S. 152 o. flg.

formelle Contradictionsprincip. Iblandt Kants kosmologiske Antinomier spiller naturligviis ogsaa Delingsproblemet sin Rolle som uopløseligt; ligesom det, hvad disse Antinomier angaaer, i det Hele er charakteristisk, at den Indsigt, Kant som Mathematiker unegtelig har i Forholdet mellem det Endelige og det Uendelige, aldeles ikke er ham nærværende, og altsaa ikke kommer ham tilgode, naar han philosopherer. Først i den ved Fichte forberedte, af Hegel udviklede Dialektik begynder et nyt Lys at opgaae over det Uendelige [1]).

Hvad nu Delingsproblemet særlig angaaer, maae vi vel, for at fatte dets fuldstændige Løsning, helst opfatte det fra to Hovedsider, nemlig den blot formelle og den substantielle Side; thi Sammensmeltningen af disse to Synspunkter, saaledes som den allerede findes hos Zeno, har vistnok ikke bidraget lidet til at forvirre Betragtningen og vanskeliggjøre Opgavens Løsning.

Zenos Forudsætning, at det Værende, dersom det Mangfoldige er, maa have en Størrelse, eller, at „det, som ingen Størrelse har, ikke er", fordrer da for det Første en Abstraheren fra det Substantielle, en Bortseen fra det Værendes Realitet. At være til er at være Størrelse, og Modsigelsen i det, at være til, en Modsigelse i det, at være Størrelse: her er Problemet i dets abstracte Form.

Modsigelsen i Størrelsens Begreb er Deelbarheden. Denne Modsigelse opløser sig i den Indsigt, at Deelbarheden ved at fortsættes i det Uendelige aldeles ikke medfører nogen Tilintetgjørelse for nogensomhelst Deel af den deelte Størrelse. Ligesom 1 ikke taber Noget ved at fremstilles som $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ eller som $2.\frac{1}{2}$, saaledes taber en Linie heller ikke det Allerringeste af sin Størrelse som et Hele derved, at den tænkes deelt i to ligestore Dele, enhver af disse Dele igjen i to Dele o. s. fr. Lade vi Rækken: $1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2 \dots$

[1]) See H. Schwarz. Anf. Skrift.

$+\left(\frac{1}{2}\right)^n+\dots$ repræsentere en i det Uendelige gaaende Dichotomie, da vil Udtrykket $\text{Lim}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ betegne et Element, en uendelig lille Størrelse, men ikke det absolute Nul. Ved en i det Uendelige fortsat Deling kan det absolute Nul ikke fremkomme; skulde en fortsat Deling føre til Nul, maatte den jo baade medføre en fortsat Tilintetgjørelse og tillige standse ved en sidste Grændse, men begge Antagelser ere i lige Grad stridende mod den uendelige Deelbarhed og mod Størrelsens Væsen. [1])

---

[1]) At Nul ikke kan naaes ved fortsat Deling, følger ogsaa deraf, at enhver ny Deling forudsætter, at der sættes en ny Grændse; men den nye Grændse kan ikke sættes umiddelbart sammen med den allerede satte; er her ikke et, om end nok saa lille, Mellemrum mellem Grændserne, falde de sammen til een Grændse, og der skeer ingen ny Deling. Naar Grændserne rykke hinanden nærmere og nærmere, maa det Begrændsede unegtelig blive mindre og mindre; men de sig hinanden nærmende Grændser tilintetgjøre dog alligevel ikke Delene, de bevæge sig kun hen over Delene. Er saaledes $y=f(x)$ Ligningen for en Curve, og $z=\Phi(x)$ Udtrykket for et Areal, begrændset af Abscisseaxen, en Deel af Curven og to Ordinater, hvoraf den fjerneste svarer til Abscissen x; da er $\Phi(x+h)-\Phi(x)$ mindre end det Rectangel, der svarer til den største Ordinat og Abscissetilvæxten h, men større end det Rectangel, der svarer til den mindste Ordinat og h. Altsaa: $h\,f(x) \lesseqgtr \Phi(x+h)-\Phi(x) \lesseqgtr h.f(x+h)$; $h\,f(x) \lesseqgtr \Phi'(x)\,h+\Phi''(x)\frac{h^2}{1.2}+\dots \lesseqgtr h\,f(x)+h^2 f'(x)+\dots$, og $f(x) \lesseqgtr \Phi'(x)+\Phi''(x)\frac{h}{1.2}+\dots \lesseqgtr f(x)+f'(x)\frac{h}{1}+\dots$ Gaaer man nu til Grændsen ved at sætte $h=0$, d. v. s. lader man de to Ordinater nærme sig hinanden, indtil de falde sammen, blive ovenstaaende Grændser til Eet med den imellem dem liggende Størrelse, d. v. s. $\Phi'(x)=f(x)$. Men idet Grænd-

Den Svimmelhed, der saa let griber En ved Forestillingen om en i det Uendelige sig fortsættende Deling, vedkommer egentlig ikke Sagen; det er en Aandsforvirring, som hidrører derfra, at man istedetfor at tænke, giver sig til at phantasere, og vil phantaserende forestille sig det, der ikke lader sig forestille. Den fortsatte Deling er, naar vi holde Tanken fast, kun en Gjentagelse af den første Deling: i den første Deling ligger hele Problemet. Tænkes en endelig Linie x deelt ved et eneste Punkt i to Linier, da er Liniens Element dx ved det angivne Punkt med det Samme deelt i to Elementer: at dele en Linie uden at dele en af dens uendelig smaae Dele, er umuligt. Kan nu Linien x deles, uden at Noget gaaer tabt eller tilintetgjøres, da gjælder det Samme om dx; men er dx deelt, uden at Noget er tilintetgjort, da er jo eo ipso $\frac{dx}{2}$, $\frac{dx}{3} \ldots \frac{dx}{n}$ ogsaa deelt, uden at nogen Deel er tilintetgjort. At dele Linien x er altsaa med andre Ord at dele Elementet dx, men at dele Elementet dx er igjen at dele et Element af Elementet, at dele $\frac{dx}{n}$; af det deelte $\frac{dx}{n}$ vil da $\text{Lim} \pm \frac{dx}{n}$ betegne de Momenter, som paa begge Sider grændse op til Grændsen, og saaledes ved uendelig Tilnærmelse gaae over i det $+0$ og -0, hvorfra det rene 0 dialektisk adskiller sig.

---

serne falde sammen, og det af dem indesluttede Areal indsvinder til 0, gaaer dog alligevel Intet tabt, ingen Deel af Størrelsen bliver tilintetgjort; kun den Forandring foregaaer, at de Arealets Dele, der før faldt indenfor de adskilte, nu falde udenfor de sammenfaldne Grændser.

Forandring af Grændser tilveiebringer vistnok altid Forandring i Størrelser og Størrelsers Forhold; men ingen Grændseforandring, ingen Omflytning, Udvidelse, Nærmelse eller Sammenfalden af Størrelsesgrændser formaaer at gjøre nogensomhelst allerede tilværende Størrelse til Intet.

Lægges derhos, efter at de formelle Vanskeligheder ere hævede, særligt Eftertryk paa den tilværende Størrelses Realitet, da viser Problemet sig fra den substantielle Side. Zenos Ord: „Kun det Udeelbare er en virkelig Eenhed, enhver af de Mange maae altsaa enten selv være en udeelbar Eenhed eller bestaae af saadanne Eenheder", angaae egentlig ikke Størrelsen blot som Størrelse, men det i Størrelsen Reelle, Substansen. Den virkelige Eenhed lider da nu ikke nærmest af den Modsigelse at være deelbar i det Uendelige; men Modsigelsen er, at den egentlige Substans skal være baade deelbar og udeelbar. Forsaavidt Størrelsen er substantiel, er dens Eenhed udeelbar; forsaavidt Substansen er Størrelse, er dens Eenhed deelbar: denne Modsigelse stod klar for Leibnitz, da han, for at undgaae den, udfandt Monadelæren[1]). Thi hvad er vel en Monade? En Enkeltsubstans, en substantiel Størrelse, en Størrelse, der er mere end en Størrelse, en oprindelig Eenhed, der ikke kan deles. For at adskille Monaderne fra de mathematiske og physiske Eenheder valgte Leibnitz at kalde dem substantielle Eenheder, metaphysiske Punkter. »On les pourroit appeller points métaphysiques ...; ainsi les points physiques ne sont indivisibles qu'en apparence: les points mathématiques sont exacts, mais ce ne sont que des modalités: il n'y a que les points métaphysiques ou de substance, qui soient exacts et réels; et sans eux il n'y auroit rien de réel, puisque sans les véritables unités il n'y auroit point de multitude«. Log. et Metph. p. 53.

I Monaderne mener altsaa Leibnitz at have de existerende Eenheder, som uagtet de ved den dem iboende Kraft

---

1) Log. et Metaph. p. 5. Necesse autem est dari substantias simplices (vel monades, nam monas non est nisi substantia simplex), quia dantur composita. Jvfr. „En Fremstilling af Leibnitz's Monadelære." E. F. Nielsen. Kbhvn 1856.

bevirke, at der danne sig physiske og deelbare Størrelser, dog i deres substantielle Enkelthed ikke desto mindre ere absolut udeelbare. Det Spørgsmaal, hvorledes Det, som i sig ikke har nogen Størrelse, kan være Princip for virkelige Størrelser, hvorledes Det, som selv er uden Udstrækning, kan frembringe det Udstrakte, bliver da besvaret derhen, at Monaderne som Enkeltsubstanser ere individuelle, saa at enhver Monade har ifølge sin individuelle Begrændsning en oprindelig virksom (force active primitive) og en oprindelig lidende Kraft (force passive primitive). Som Materiens Princip har den lidende Kraft en Tendens til Udstrækning, og foraarsager derved, at den oprindelige Materie (materia prima), der ikke bestaaer »in extensione«, men »in extensionis exigentia«, bliver en udstrakt og derved uendelig deelbar Størrelse. [1])

Det i denne Forklaring Utilfredsstillende er, saalænge det Dialektiske oversees, for iøinefaldende til, at Modsigelsen ikke skulde have fundet sit tilsvarende Udtryk i den kritiske Philosophie. Under „den rene Fornufts Antinomier" fremstiller Kant da ogsaa som „de transcendentale Ideers anden Strid" Striden om det Udeelbare-Deelbare. Thesis: Enhver sammensat Substans i Verden bestaaer af enkelte Dele, og der existerer overalt Intet, uden det Enkelte, eller det, som deraf er sammensat. Antithesis: Ingen sammensat Ting i Verden bestaaer af enkelte Dele, og der existerer overalt intet Enkelt i Verden.

„Antager man", saaledes bevises Thesis, „at de sammensatte Substanser ikke bestode af enkelte Dele, saa vilde der, naar alle Sammensætninger tænkes opløste, ikke

---

[1]) Il est vrai (selon mon système) qu'il n'y a point de portion de la matiere, ou il n'y ait une infinité de corps organiques .... Il n'y a point de partie de la matiére, qui ne soit divisée actuellement. Log. et Metaph. p. 39, 44 o. fl.

blive nogen sammensat Deel, og (da der ingen enkelte Dele gives) heller ingen enkelt tilbage: man fik da tilsidst kun det rene Intet, og der kunde følgelig ikke gives nogen Substans." Beviset for Antithesis hviler paa følgende Grundtanke: „Den sammensatte Ting (Substans) maa være i Rummet; men Rummet bestaaer ikke af enkelte Dele, men af mindre Rum; altsaa maa enhver Deel af det Sammensatte indtage et Rum. I alt Sammensat ere de egentlig første Dele enkelte; altsaa indtager det Enkelte et Rum. Da nu nu ethvert Reale, der indtager et Rum, omfatter en Mangfoldighed af udenfor hinanden værende Dele, og følgelig er sammensat, og det som et reelt Sammensat ikke af Accidenser (thi Accidenserne maae, for at være udenfor hinanden, forudsætte Substansen), men af Substanser: saa maatte det Enkelte, forsaavidt det skulde være i Rummet, være et substantielt Sammensat; hvilket er en Modsigelse." [1])

---

[1]) At Kant i denne Antithetik blot opfatter det Enkelte som Forudsætning for og Modsætning til det Sammensatte, og forsaavidt kun seer den Leibnitziske Enkeltsubstans fra dens ene Side, fremhæver han selv udtrykkelig i sin „Anmerkung zur zweiten Antinomie." (Krit. d. r. V. S. 356) „Ich rede übrigens hier nur von dem Einfachen, so fern es nothwendig im Zusammengesetzten gegeben ist, indem dieses darin, als in seine Bestandtheile aufgelöset werden kann. Die eigentliche Bedeutung des Wortes Monas (nach Leibnitzens Gebrauch) sollte wohl nur auf das Einfache gehen, welches unmittelbar als einfache Substanz gegeben ist (z. B. im Selbstbewußtseyn) und nicht als Element des Zusammengesetzten, welches man besser den Atomus nennen könnte. Und da ich nur in Ansehung des Zusammengesetzten die einfachen Substanzen, als deren Elemente beweisen will, so könnte ich die Antithese der zweiten Antinomie die transcendentale Atomistik nennen. Weil aber dieses Wort schon vorlängst zur Bezeichnung einer besonderen Erklärungsart körperlicher Erscheinungen (molecularum) gebraucht worden, und also empirische Begriffe voraussetzt, so mag er der dialektische Grundsatz der Monadologie heißen."

Spørgsmaalet om det Enkeltes Forhold til det Sammensatte viser, hvad enten man saa om det Enkelte bruger Udtrykket „Atomus" eller „Monas", oprindelig hen til Spørgsmaalet om Materiens Forhold til Kraften, og derved til Spørgsmaalet om den extensive Størrelses Forhold til den intensive. Det er den rationelle Mechanik, som ved Anvendelse af det Uendeliges Analyse fra sit exacte Standpunkt udbreder et høiere Lys over de omspurgte Grundforhold, og derved giver en for Problemets Løsning uundværlig Forudsætning; men Løsningen selv er dialektisk.

Ved at fastholde den kritiske Grændse lader den exacte Videnskab overalt saadanne modsatte Begreber som: Materie og Kraft, det Intensive og det Extensive, det Enkelte og det Sammensatte, udelukke hinanden; hvad der er Materie er altsaa ikke Kraft, det Extensive er ikke intensivt, det Enkelte ikke sammensat. At Kraften væsentlig er Materie og Materien Kraft, at det Extensive i sin Realitet dog alligevel er intensivt, og det Intensive extensivt, at det Enkelte i Grunden kan være et Sammensat, og det Sammensatte et Enkelt: slige Sætninger maa den rationelle Mechanik paa det Bestemteste afvise, just fordi den er en exact, ikke en dialektisk Videnskab.

Men netop ved sine exacte Analyser kan den rationelle Mechanik paa en ganske eiendommelig Maade siges at forberede og fremkalde en videnskabelig Indsigt i det Dialektiske. Den rationelle Mechanik bliver nemlig ikke staaende ved den Kjendsgjerning, at de endelige Masser paa endelig Maade tiltrække hinanden, men tyder Tiltrækningen saaledes, at hver mindste Deel i hver Masse maa, idet den tiltrækkende tiltrækkes, paa een Gang være baade Udgangspunkt og Angrebspunkt (point d'application) for en virkende Kraft. Forsaavidt her nu ikke handles om dette eller hiint Virkelige, der altid er disse eller hine særegne Betingelser underlagt, men om Phænomenernes Væsen, det Virkeliges Princip, bliver det Endelige consequent opløst i det Uendelige

som i sin Grund, og dette Uendelige saa igjen opfattet som den reale Mulighed, der altid paa givne Betingelser virkeliggjøres i et tilsvarende endeligt Udtryk. [1])

Indsvinder, for at henvise til et Exempel, det materielle Volumen $\varrho v = M$ til et extensivt Element dM, saa indsvinder Kraften (Vægten) P med det Samme til et intensivt Element dP; en endelig Kraft (Vægt) er altsaa kun mulig ved Massens tilsvarende endelige Volumen. Betegner p Vægten af en Volumenenhed, da bliver Vægten af et Volumenelement, udtrykt ved polære Coordinater, d. $P = pr^2\, dr \sin\alpha\, d\alpha\, d\Theta$. Integreres nu denne Ligning, faaes endelig Vægt gjennem endeligt Volumen. Er det t. Ex. en homogen Kugle, saa at p altsaa er constant, erholder man, for r = a, ved Integration: $P = p\int_0^a\int_0^\pi\int_0^{2\pi} r^2\, dr \sin\alpha\, d\alpha\, d\Theta$

$$= 2p\pi\int_0^a\int_0^\pi r^2\, dr \sin\alpha\, d\alpha = 4p\pi\int_0^\alpha r^2\, dr = \frac{4}{3}p\pi a^3.$$

Ved enhver endog den allermindste Variation af a, maa, idet p er constant, en tilsvarende Variation finde Sted i P, og omvendt; d. e. enhver endog den allerringeste Forandring i det Materielle, det Extensive, er med det Samme en Forandring i Kraften, det Intensive.

---

[1]) Il est évident, ... que la division de la masse en élémens infiniment petits, et la supposition d'une densité de chaque élément, qui ne varie pas dans les corps homogènes, ou qui varie par degrés insensibles dans les corps hétérogènes, ne conviennent point aux corps naturels; mais cela n'empêche pas qu'on ne puisse faire usage des formules fondées sur cette considération ... Poisson Traité de Méchanique. Tom. I. Paris 1833. S. 175.

At Poisson ved »corps naturels« kun tænker paa Tingene i deres Endelighed, ikke paa Tingenes Væsen, sees ogsaa af et Udtryk som dette: Un infiniment petit est une grandeur moindre que toute grandeur donnée de la même nature. Anfr. Skr. S. 14.

Af den herved antydede Analyse fremgaaer det da som uimodsigeligt Resultat, at Materien i det Uendelige forudsætter Kraften, ligesom Kraften igjen i det Uendelige forudsætter Materien, at Materien altsaa ligesaa lidt kan være uden Kraft, som Kraften uden Materie, at Materiens og Kraftens Tilværen væsentlig er een og samme Væren. Da Kraften kun er mulig formedelst Materien, er det umuligt at aflede Materien af Kraften; da Materien omvendt kun er mulig formedelst Kraften, er det umuligt at aflede Kraften af Materien; den dynamiske Anskuelse, der gjør Kraften til Princip, er ligesaa uholdbar, som den materialistiske, der gjør Materien til Princip: Principet er hverken Kraften som Kraft eller Materien som Materie, men Materiens og Kraftens dialektiske Eenhed.

I Materiens og Kraftens dialektiske Eenhed sees tillige den extensive Størrelses dialektiske Eenhed med den intensive. Idet den extensive Størrelse M indsvinder til d M og den intensive P til d P, ere de begge i deres Anlæg identiske; idet d M integreres til M og d P til P, ere de begge i deres Virkelighed identiske. Her er i den virkelige Kugle, hvad Relationen mellem dens Masse og Vægt angaaer, ikke en intensiv Størrelse for sig, forbunden med en extensiv, men en intensiv Størrelse, hvis Realitet bestaaer i det Extensive, en extensiv Størrelse, hvis Realitet er sat i det Intensive. „Man kan," hedder det om Tyngdepunktet,[1] „forestille sig Tingene, som om hele Legemets Vægt var forenet i Tyngdepunktet, og alle de øvrige Dele ingen Vægt havde." Ja, saaledes kan man ganske vist „forestille" sig Tingene; men saaledes kan man ikke tænke sig Tingene.

I den extensive Størrelses dialektiske Eenhed med den intensive sees Eenheden af det Udeelbare med det Deelbare, det Enkelte med det Sammensatte. Forsaavidt det Intensive sættes i Forestillingen mod det Extensive, vil hiint

[1]) Naturlærens mechaniske Deel af H. C. Ørsted. S. 28.

naturligviis repræsentere det Udeelbare, dette det Deelbare, hiint det Enkelte, dette det Sammensatte. At det just er en saadan forestillet Modsætning, hvortil Leibnitz og Kant, hver paa sin Maade, holde sig, er let at paavise. Hvad Leibnitz kræver af sine »points metaphysiques«, at de nemlig skulle være exacte som de mathematiske Punkter, og reelle som de physiske, passer udelukkende paa de i Virkelig-heden intensive Punkter; et saadant intensivt Punkt er nu just, for at blive ved det valgte Exempel, en Kugles Tyngde-punkt. Naar paa den anden Side Kant, efter at han i „Thesis" har gjort samme Fordring til det Enkelte som Leibnitz, opstiller til Modsætning den Paastand, at ingen sammensat Ting bestaaer af enkelte Dele, at der i det Hele ikke existerer noget Enkelt: da gjør han i denne sin „Anti-thesis" en meget eensidig Brug af den extensive Størrelse. Misforstaaelsen hos Leibnitz og Kant beroer, trods den store Forskjel, der ellers er i deres philosophiske Synsmaade, hvad det i Delingsproblemet Substantielle angaaer, væsentlig paa det Samme. Det Sammensatte maa, derom ere begge enige, nødvendigviis forudsætte det absolut Enkelte, det Deelbare det absolut Udeelbare; men denne Antagelse er hverken overeensstemmende med rationel Mechanik eller med Tingenes Natur.

I den intensive Eenhed bestaaer den reelle Enkelthed; men da det Intensive, som ovenfor er viist, har sin Rea-litet i det Extensive, og da enhver endelig Kraft er en Re-sultant af Composanter, hvis materielle Angrebspunkter ved at være ved Siden af hverandre afgive det Extensive: saa vil Atomet selv, forsaavidt det indtager et Rum, have Dele, og disse Dele udgjøre materielle Angrebspunkter for de Composanter, hvis Resultant er Atomets endelige Kraft, dets intensive Eenhed. Antages Atomet nu dog alligevel at være et i sig Udeelbart, et absolut Enkelt: da er det ikke et Enkelt, forbi det ingen Dele har, men forbi der tillægges Delenes Sammenhængskraft en saa stor Intensitet, at ingen

Magt i Tilværelsen formaaer at skille dem ad; med andre Ord: Atomet er da et absolut Udeelbart, forsaavidt dets Deles Sammenføining er absolut, Atomet er et absolut Enkelt, forsaavidt det er et absolut Sammensat; men et absolut Sammensat er en Modsigelse, og et absolut Atom en Fiction. Den Forestilling, at et absolut Enkelt nødvendigviis skulde ligge til Grund for det Sammensatte, er da ogsaa en reen Indbildning; thi hvad er vel det absolut Enkelte? Det, som ifølge sit Begreb ikke indgaaer, og ikke kan indgaae i nogen endelig Sammensætning! At den rationelle Mechanik ligesaa exact kan decomponere Kraften i det Uendelige, som dele Massen i det Uendelige, medens det dog er det i Kraften Intensive, der giver Enkeltheden Realitet, viser, hvad desuden ligger i Sagens Natur, at, ligesom enhver endelig Sammensætning er relativ, maa ogsaa enhver tilsvarende Enkelthed være relativ. Paa det Enkeltes Relativitet beroer det Sammensattes Realitet; men det Enkeltes Relativitet beroer igjen, naar den sees under Størrelsens og navnlig under den extensive Størrelses Synspunkt, paa dets uendelige Deelbarhed. Det Sammensatte har altsaa, ifølge de naturlige Overgange, sin Realitet i det Enkelte derved, at det Enkelte igjen har sin Realitet i det Sammensatte: den uendelige Dialektik af det Enkelte og det Sammensatte er Delingsproblemets Løsning.

b) Bevægelsesproblemet.

Hvor inderlig dette Problem hænger sammen med det foregaaende, sees af Eleaternes herhen hørende Indsigelser. Imod Muligheden af en Bevægelse i Rummet har Zeno opstillet fire Beviser, der alle grunde sig paa Rummets uendelige Deelbarhed. „Dersom Rummet eller den Materie, som opfylder Rummet, er uendelig, saa at ingen Deel er den mindste, da er Bevægelsen umulig, fordi den forudsætter, at et Legeme skrider frem fra et Sted til et andet, og altsaa gjennemløber et Rum. Men dette er umuligt, efterdi ethvert Rum

er uendeligt, og følgelig ikke kan giennemtrænges i en given endelig Tid. Eller kortere: Uendeligheden af det Rum, der skal gjennemløbes, er i Strid med Tidens Endelighed, uden hvilken ingen Bevægelse er mulig" [1]).

Den Omhu, hvormed Aristoteles i sine physiske Skrifter søger at afvæbne Zenos Indvendinger, giver os ikke blot et Vidnesbyrd om hans Skarpsindighed, men minder tillige om den Braad, der er skjult i de zenoniske Grunde. Zenos første Beviis, hvortil der allerede ovenfor (S. 35) er taget Hensyn, lader sig fremstille saaledes: „Naar et Legeme bevæger sig, saa gjennemløber det en Linie fra det ene Punkt til det andet: det maa altsaa, førend det kan komme til Endepunktet, først være kommet til Midtpunktet. Da nu ethvert Rum er deleligt i det Uendelige, saa bestaaer enhver af Liniens Dele ligesaavel af uendelig mange Dele, som den hele Linie; Legemet kan under sin Bevægelse altsaa aldrig naae til Liniens Midtpunkt, endsige til dens Endepunkt, d. e. Bevægelsen kan slet ikke tænkes."

Forsaavidt Nerven i Beviset sættes deri, at et endeligt Rum, som ved at deles i det Uendelige bliver uendeligt, skulde, for at gjennemløbes, fordre, ikke en endelig, men en uendelig Tid, har Aristoteles træffende bemærket, at Tiden ligesaavel er deelbar i det Uendelige, som Rummet, og at Zeno netop har feilet deri, at han har anseet Tiden for anderledes begrændset end Rummet [2]). Herved er imidlertid, og det vistnok med fuld Ret, den Betænkelighed anført, at, „om ogsaa Zeno har feilet i at betragte Tiden paa en anden Maade end Rummet, saa har Aristoteles ved at blotte denne Beviisets formelle Svaghed dog i Realiteten ikke rokket Beviset selv; den Vanskelighed, at en Bevægelse i

[1]) Tennemann. Geschichte der Philos. 1ster Band. Leipzig 1798. S. 197.

[2]) *Ζήνων οὖν παραλογιζόμενος, ἄλλως τὸ τοῦ χρόνου πεπερασμένον λαμβάνει, καὶ ἄλλως τὸ τοῦ σταδίου* . . . Jvfr. Tennemann. Anfr. Skr. 3ter Band. S. 151.

Rummet kun kan tænkes som en i det Uendelige sig tabende Overgang fra Punkt til Punkt, at det Legeme, der skulde bevæge sig, altsaa først maatte blive færdigt med en Uendelighed af uendelig smaae Bevægelser,[1]) før en endelig Bevægelse kunde opnaaes, staaer endnu ved Magt, om man endog tænker sig Tiden deelt paa samme Maade som Rummet." Denne Vanskelighed, der da heller ikke hæves ved en kantisk Adskillelse „zwischen Ding an sich und Erscheinung", hører blandt de slaaende Exempler, der vise Nødvendigheden af at lade den exacte Analyse afgive Bedrebsudviklingens Forudsætninger. Det Blændende i Zenos Beviis svarer til en Illusion, der ligesaavel gaaer igjennem den kantiske[2]) som igjennem den aristoteliske Tænkning, den Illusion nemlig, at det Uendelige skulde falde ved Siden af det Endelige, være dets Negation uden at være dets Affirmation, at man altsaa, forsaavidt man var i en Uendelighed, skulde befinde sig udenfor Endeligheden. At denne Forudsætning er grundfalsk, har det Uendeliges Analyse godtgjort, idet den har godtgjort, at den endelige Størrelse, væsentlig opfattet som et bestemt Integral, netop er en Determination af $0 . \infty$, at man altsaa ved at bevæge sig i den bestemte Uendelighed bevæger sig midt i en Endelighed. Forsaavidt Endeligt maales med Endeligt, er Bevægelsen en uafbrudt Succession, en

---

[1]) „Weil aber diese Theile unendlich sind, so muß er sich eine endlose Zeit bewegen, ehe er sie durchläuft, er kommt also nie aus den letzten." Tennemann. Anfr. Skr. 3ter Band. S. 152.

[2]) „Denn die Bewegung des Räumlichen ist so gut als eine Theilung, weil sie nicht anders kann gedacht werden, als wie ein Fortrücken von einer Stelle zur andern. Und da nun Aristoteles das Wesen jeder stetigen Größe darin setzt, daß jeder Theil derselben wieder aus Theilen bestehet (nicht etwa von uns blos so vorgestellt wird), so muß das Bewegliche unendliche Theile durchlaufen, ehe es von einer Stelle zur andern kommen kann; das ist aber so viel als, es kann nie von einer Stelle zur andern übergehen. Und gerade das ist es, was Zeno wollte." Tennema' Anfr. Værk. 3ter Band. S. 153.

stadig Overgang fra et Mindre til et Større: først det Mindre, saa det Større, først en Tomme, saa et Qvarteer, først den halve Vei, saa den hele; men en saadan Succession, der i sin Continuitet kun er mulig formedelst det Endeliges dialektiske Eenhed med det Uendelige, gjælder ikke Forholdet mellem Uendeligt og Endeligt indbyrdes: Bevægelsen fordrer ikke først et Uendeligt, thi idet et Uendeligt sættes, er det Endelige allerede forudsat[1]). Skulde Bevægelsen, som Zeno

---

[1]) I hvilken Forstand det Endelige kan siges at være samtidigt med det Uendelige, oplyser den rationelle Mechanik fra mangfoldige Steder. „D'Alemberts Princip anvendes ikke blot paa continuerligt virkende Kræfter, comparable med Tyngden, men ogsaa paa de saakaldte instantane Kræfter, som frembringe pludselige Forandringer i Hastighed, f. Ex. ved faste Legemers Sammenstød. Denne anden Art af Kræfter er strængt taget ikke forskjellig fra den første; thi i Naturen vil ingen Forandring i Hastighed foregaae pludseligen, men Hastigheden maa, om end i et nok saa lille og umærkeligt Tidsinterval continuerligen gjennemløbe alle Værdier fra den oprindelige, som var tilstede, idet Kraften begyndte at virke, indtil den Slutningshastighed, som opnaaes til samme Tid, som Kraften ophører. Maalet for disse Kræfter haves følgelig paa Grund af det samme Princip, hvorefter f. Ex. Tyngden maales, nemlig efter Formlen $g = \frac{v}{t}$, hvilket ogsaa gjælder for en variabel Kraft Φ i Henseende til dens Middelværdie i en vis Tid t, nemlig $\frac{\int_0^t \Phi dt}{t} = \frac{v}{t}$." C. Ramus. Analytisk Mechanik. Kbhvn. 1852. S. 211.

Vi komme da ifølge denne Betragtningsmaade, til at skjelne imellem: α) et absolut Nu, det abstract-logiske Øieblik, Grændsen mellem Fortid og Fremtid, et Nul, som ikke kan integreres, β) et relativt Nu, det mathematiske Øieblik, Tidselementet dt, som kan integreres, og γ) et empirisk Øieblik, Stødets virkelige Nu, den umærkelig lille Tidsdeel. I det absolute Nu er Intet, og skeer Intet. I det relative Nu sættes det Uendelige som det Endeliges Begyndelse, dets Element og Anlæg, og derhos tillige som en Uendeligheds Begyndelse: det Endeliges Begyndelse, falder alt-

foregiver, udtømme det Uendelige, før den kunde naae det Endelige: ja, det vilde medtage en evig Tid, det vilde være et uendeligt Sinkeri! men, naar Bevægelsen ligesaa oprindelig begynder med det Endelige, som med det Uendelige, naar det Endelige i Bevægelsen altid er, ikke bagefter eller forud for, men samtidigt med det Uendelige, fordi det ved at forudsætte det Uendelige selv er det Uendeliges Forudsætning: da er Dæmningen brudt, da har Bevægelsen frit Løb, og Zeno er afvæbnet.

Imod Zenos andet Beviis (Achilles) anbringer Aristoteles i Grunden, paa en lille Ændring nær, den samme Indvending, som han allerede har brugt imod det første. Beviset, der skal godtgjøre, at Achilles ikke kan naae Skildpadden, d. v. s., at et Legeme, der antages at bevæge sig med stor Hastighed, ikke kan indhente et andet Legeme, der i nogen Afstand tænkes at bevæge sig med en endog meget ringe Hastighed, har ligesom det Foregaaende den Fordeel, at det holder sig i det Punktuelle. Man sætte t. Ex., at to Legemer, A og B, bevæge sig paa samme Linie, saaledes at A, der har en ti Gange større Hastighed end B, gjennemløber den første Halvdeel af Linien, idet B gjennemløber Tiendedelen af den anden Halvdeel; før A kan naae B, maa det da ogsaa gjennemløbe denne Tiendedeel, men medens A gjennemløber benævnte Tiendedeel, gjennemløber B igjen en Tiendedeel af den følgende Tiendedeel, o. s. fr. Uagtet B.s Forspring hver Gang bliver mindre og mindre, faaer det ved sin Bevægelse dog et lille Forspring; dette Raisonnement kan nu fortsættes i det Uendelige, og i det Uendelige give os en Tiendedeel af en Tiendedeel af en Tiendedeel:

saa sammen med, er i det mathematiske Øieblik samtidig med det Uendeliges Begyndelse. I det empiriske Øieblik sættes det Endelige som fuldendt; men i og med denne det Endeliges Fuldendelse er en Uendelighed selv fuldendt: det Endeliges Fuldendelse falder altsaa sammen med, er i hvert virkeligt Øieblik samtidig med en Uendeligheds Fuldendelse.

Phantasien virker, Forestillingen forvirres, og Tanken svimler. Imod en saa punktuel Fremstilling ere almeenlogiske Bemærkninger uden Virkning: at sige et Par passende Ord om Continuitet og Discretion, om stadig Formindskelse o. s. v., forslaaer ikke; skal Blændværket hæves, maa det Punktlige sættes mod det Punktlige, og den exacte Analyse anbringes. Vælge vi da den Tid, A vil være om at gjennemløbe Strækningen l, Afstanden imellem A's og B's Udgangspunkt, til Tidseenhed, og kalde A's Udgangspunkt u, danne sig følgende Rækker:

I Tiden 0 har A en Afstand fra $u = 0$, B en Afstand fra $u = l$; i Tiden 1 er A's Afstand fra $u = l$, B's Afstand fra $u = (1 + \frac{1}{10})\,l$; i Tiden $1 + \frac{1}{10}$ er Afstanden for $A = (1 + \frac{1}{10})\,l$, for $B = (1 + \frac{1}{10} + (\frac{1}{10})^2)\,l$, i Tiden $1 + \frac{1}{10} + (\frac{1}{10})^2$ for $A = (1 + \frac{1}{10} + (\frac{1}{10})^2)\,l$, for $B = (1 + \frac{1}{10} + (\frac{1}{10})^2 + (\frac{1}{10})^3)\,l$; i Tiden $1 + \frac{1}{10} \ldots + (\frac{1}{10})^n$ for $A = (1 + \frac{1}{10} \ldots + (\frac{1}{10})^n)\,l$, for $B = (1 + \frac{1}{10} \ldots + (\frac{1}{10})^n + (\frac{1}{10})^{n+1})\,l$. Spørges nu: naar vil A naae B? da følger det af sig selv, at dette først vil kunne skee, naar følgende Ligning er tilstillet: $(1 + \frac{1}{10} + (\frac{1}{10})^2 \ldots\ldots + (\frac{1}{10})^n)\,l = (1 + \frac{1}{10} + (\frac{1}{10})^2 \ldots\ldots + (\frac{1}{10})^n + (\frac{1}{10})^{n+1})\,l$, det vil sige, naar $(\frac{1}{10})^{n+1} = 0$, altsaa, naar $n = \infty$. Den hertil svarende Tid: $1 + \frac{1}{10} + (\frac{1}{10})^2 \ldots + \text{Lim}\,(\frac{1}{10})^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{9} = 1\frac{1}{9}$ er, som man seer endelig, og A naaer altsaa B i en endelig Tid. Er den valgte Tidseenhed t. Ex. 1 Sec., vil A behøve $1\frac{1}{9}$ Sec. for at naae B; de uendelig mange mindre og mindre Mellemrum, der svare til de uendelig mange mindre og mindre Tidsdele, ville da i Løbet af $1\frac{1}{9}$ Sec., idet de som det Endeliges Elementer Punkt for Punkt resultere af det Endelige, give det endelig bestemte Resultat.

Erkjendelsen af den Maade, hvorpaa det Uendelige begaaer op i det Endelige, hviler paa den Sætning, at en Række med utallige Led kan give en endelig Sum, og at

rsaavidt betinget af Indsigt i uendelige Rækkers Con-rgens. At den in abstracto uopnaaelige Grændse just iver opnaaet derved, at en uendelig Række ikke blot i anken, men i Virkeligheden føres til Ende, at en Uende-ighed virkelig gjennemløbes i og med det Endelige, er alt-a den Dialektik, hvormed Illusionen ophører.

Det tredie Beviis (den flyvende Piil) er holdt i en ere almindelig Form, og lader sig fremsætte saaledes [1]: Skulde et Legeme bevæge sig, saa vilde deraf følge, at det ra een Gang maatte være i Bevægelse og i Hvile; thi hvert sig bevægende Legeme maa i ethvert Øieblik være i Rum, der netop er ligestort med det selv. Men saaledes Legemet i Hvile; thi hvad der, om end kun for et Øie-ik, befinder sig i et tilsvarende lige Rum, er med Hensyn ta dette Rum i Hvile. Tænke vi os en Piil, der med rste Hurtighed gjennemflyver et Rum, saa maa den i hvert iieblik være i et andet Rum, og forsaavidt den indtager itte hvert Øieblik være i Hvile. En saadan flyvende Piil aatte da tænkes at være paa een Gang baade i Hvile og Bevægelse, hvilket er en Modsigelse."

Hvad Aristoteles i denne Anledning har udviklet an-aaende de continuerlige Størrelser, Rummet og Tiden j begges uendelige Deelbarhed [2]), angaaende Forskjellen ellem Tidsgrændsen, Nuet og Tidselementet [3]), angaaende

) Tennemann. Anfr. Skr. 1ster Band. S. 198—199.

) Physic. VI, 1.

) Physic. VI, 3. „Die Unmöglichkeit aber, daß in dem Augenblicke als solchem etwas sich bewege, oder, als Gegensatz der Bewegung, ruhe, ergiebt sich aus den Begriffen der Schnelligkeit und Langsamkeit, welcher Gegensatz als wesentlich jeder Bewegung zukommend bereits vorhin gesetzt worden war; sodann aber auch aus der Definition des Augenblicks selbst, in welchem, dafern er zugleich der Vergangenheit und der Zukunft angehört, so oft die Ruhe in Bewegung, und umgekehrt, übergeht, Ruhe, und Bewegung in Bezug auf dasselbe Ding zugleich statt finden müßte, was widersinnig

Phantasien virker, Forestillingen forvirres, og Tanken svimler. Imod en saa punktuel Fremstilling ere almeenlogiske Bemærkninger uden Virkning: at sige et Par passende Ord om Continuitet og Discretion, om stadig Formindskelse o. s. v., forslaaer ikke; skal Blændværket hæves, maa det Punktlige sættes mod det Punktlige, og den exacte Analyse anbringes. Vælge vi da den Tid, A vil være om at gjennemløbe Strækningen l, Afstanden imellem A's og B's Udgangspunkt, til Tidseenhed, og kalde A's Udgangspunkt u, danne sig følgende Rækker:

I Tiden 0 har A en Afstand fra $u = 0$, B en Afstand fra $u = l$; i Tiden 1 er A's Afstand fra $u = l$, B's Afstand fra $u = (1 + \frac{1}{10})\,l$; i Tiden $1 + \frac{1}{10}$ er Afstanden for $A = (1 + \frac{1}{10})\,l$, for $B = (1 + \frac{1}{10} + (\frac{1}{10})^2)\,l$, i Tiden $1 + \frac{1}{10} + (\frac{1}{10})^2$ for $A = (1 + \frac{1}{10} + (\frac{1}{10})^2)\,l$, for $B = (1 + \frac{1}{10} + (\frac{1}{10})^2 + (\frac{1}{10})^3)\,l$; i Tiden $1 + \frac{1}{10} \ldots + (\frac{1}{10})^n$ for $A = (1 + \frac{1}{10} \ldots + (\frac{1}{10})^n)\,l$, for $B = (1 + \frac{1}{10} \ldots + (\frac{1}{10})^n + (\frac{1}{10})^{n+1})\,l$. Spørges nu: naar vil A naae B? da følger det af sig selv, at dette først vil kunne skee, naar følgende Ligning er tilstillet: $(1 + \frac{1}{10} + (\frac{1}{10})^2 \ldots\ldots + (\frac{1}{10})^n)\,l = (1 + \frac{1}{10} + (\frac{1}{10})^2 \ldots\ldots + (\frac{1}{10})^n + (\frac{1}{10})^{n+1})\,l$, det vil sige, naar $(\frac{1}{10})^{n+1} = 0$, altsaa, naar $n = \infty$. Den hertil svarende Tid: $1 + \frac{1}{10} + (\frac{1}{10})^2 \ldots + \mathrm{Lim}\,(\frac{1}{10})^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{9} = 1\frac{1}{9}$ er, som man seer endelig, og A naaer altsaa B i en endelig Tid. Er den valgte Tidseenhed t. Ex. 1 Sec., vil A behøve $1\frac{1}{9}$ Sec. for at naae B; de uendelig mange mindre og mindre Mellemrum, der svare til de uendelig mange mindre og mindre Tidsdele, ville da i Løbet af $1\frac{1}{9}$ Sec., idet de som det Endeliges Elementer Punkt for Punkt resultere af det Endelige, give det endelig bestemte Resultat.

Erkjendelsen af den Maade, hvorpaa det Uendelige her gaaer op i det Endelige, hviler paa den Sætning, at en Række med utallige Led kan give en endelig Sum, og er

forsaavidt betinget af Indsigt i uendelige Rækkers Convergens. At den in abstracto uopnaaelige Grændse just bliver opnaaet derved, at en uendelig Række ikke blot i Tanken, men i Virkeligheden føres til Ende, at en Uendelighed virkelig gjennemløbes i og med det Endelige, er altsaa den Dialektik, hvormed Illusionen ophører.

Det tredie Beviis (den flyvende Piil) er holdt i en mere almindelig Form, og lader sig fremsætte saaledes [1]): „Skulde et Legeme bevæge sig, saa vilde deraf følge, at det paa een Gang maatte være i Bevægelse og i Hvile; thi ethvert sig bevægende Legeme maa i ethvert Øieblik være i et Rum, der netop er ligestort med det selv. Men saaledes er Legemet i Hvile; thi hvad der, om end kun for et Øieblik, befinder sig i et tilsvarende lige Rum, er med Hensyn paa dette Rum i Hvile. Tænke vi os en Piil, der med største Hurtighed gjennemflyver et Rum, saa maa den i hvert Øieblik være i et andet Rum, og forsaavidt den indtager dette hvert Øieblik være i Hvile. En saadan flyvende Piil maatte da tænkes at være paa een Gang baade i Hvile og i Bevægelse, hvilket er en Modsigelse."

Hvad Aristoteles i denne Anledning har udviklet angaaende de continuerlige Størrelser, Rummet og Tiden og begges uendelige Deelbarhed [2]), angaaende Forskjellen mellem Tidsgrændsen, Nuet og Tidselementet [3]), angaaende

---

[1]) Tennemann. Ansr. Skr. 1ster Band. S. 198—199.

[2]) Physic. VI, 1.

[3]) Physic. VI, 3. „Die Unmöglichkeit aber, daß in dem Augenblicke als solchem etwas sich bewege, oder, als Gegensatz der Bewegung, ruhe, ergiebt sich aus den Begriffen der Schnelligkeit und Langsamkeit, welcher Gegensatz als wesentlich jeder Bewegung zukommend bereits vorhin gesetzt worden war; sodann aber auch aus der Definition des Augenblicks selbst, in welchem, dafern er zugleich der Vergangenheit und der Zukunft angehört, so oft die Ruhe in Bewegung, und umgekehrt, übergeht, Ruhe, und Bewegung in Bezug auf dasselbe Ding zugleich statt finden müßte, was widersinnig

Forskjellen mellem en Hvile, der udelukker Bevægelse, og den Hvilens uendelige Forhindring, der udgjør Bevægelsen selv[1]), hører vistnok til det Betydeligste, der endnu er præsteret i Naturphilosophien; ligesom det jo ogsaa maatte følge af Sagens Natur, at den Kategorie, der hos Aristoteles er Physikens Grund-Kategorie, nemlig Bevægelsen (κινησις), vilde hos en saa alsidig og udholdende Tænker finde en alsidig og, saavidt muligt, udtømmende Behandling.

Men, ihvorvel den aristoteliske Skarpsindighed fra mange Sider trænger ind i Sagen, har dog en tilfredsstillende

---

wäre." C. H. Weisse. Aristoteles Physik. Leipzig 1829. Anmerkung zum 6ten Buche. S. 593.

[1]) Charakteristisk er især den Maade, hvorpaa 8de Kapitel (Phys. VI) ender: „Men da Alt, hvad der bevæger sig, bevæger sig i en Tid, og gaaer fra Noget over i Noget (ἐκ τινός εἴς τι μεταβάλλει), kan det sig Bevægende da for det Første ikke i nogen Henseende hvile, hvad den Tid, hvori det ganske (ἐν ᾧ χρόνῳ κινεῖται καθ, αὑτό) og ikke deelviis (καὶ μὴ τῶν ἐν ἐκείνου τινί) bevæger sig, angaaer. Thi Hvilen bestaaer deri, at saavel Tingen selv, som enhver af dens Dele er en Tidlang i Eet og det Samme. Kun da nemlig tale vi om Hvile, naar det med Sandhed kan siges, at Tingen med samt dens Dele er i forskjellige Øieblikke efter hinanden (ἐν ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ τῷ νῦν) paa eet og samme Sted. Men naar Hvilen bestaaer heri, saa formaaer det sig Forandrende ikke at være heelt og holdent i Noget, hvad den første Tid angaaer. Thi al Tid er deelbar: saa at man med Sandhed kunde sige, at det Foranderlige var i de forskjellige Tidsdele paa samme Sted, det selv saavel som dets Dele. Forholder det sig derimod ikke saaledes, er det sig Bevægende kun i et eneste Nu (ἐν ἑνὶ μόνῳ τῷ νῦν) her eller der: saa vil det ikke hvad nogensomhelst Tid, men kun hvad en Tids-Grændse, angaaer være i Noget. I hvert Nu vil det vistnok altid befinde sig i Noget, men ikke saaledes, at det hviler (ἐν δὲ τῷ νῦν ἔστι μὲν ἀεὶ κατά τι μένον οὐ μέντοι ἠρεμεῖ). I det rene Nu kan hverken Bevægelse eller Hvile finde Sted, men derimod Ikke-Bevægelse og Ikke-Hvile. Men i Tiden kan det sig Bevægende derimod ikke forholde sig paa samme Maade, som det Hvilende; thi da vilde jo deraf følge, at det sig i Rummet Bevægende tillige hvilede."

Knudens Løsning været umulig, og det af dobbelt Grund. For det Første er Savnet af exacte Analyser paafaldende; hvad her og der anføres, for at gjøre Forholdet imellem Stedforandring og Tidsforandring, det Hurtigere og det Langsommere o. desl. tydeligt, kan, da Reflexionen ikke understøttes af tilsvarende Operation, ikke komme ud over den logiske Almindelighed, og Relationerne derfor heller ikke articuleres i den Grad, at en punktlig Overeensstemmelse af Begreb og Virkelighed skulde kunne vise sig: Adskillelsen af Tidselementet og det rene Nu er som en Raisonnementets Udflugt, en subtil Vending, en forblommet Talemaade forbleven i Dunkelhed [1]).

Den anden ligesaa væsentlige Hindring er Mangel af gjennemgaaende Dialektik. Vel er Aristoteles formeget Tænker og formeget Græker til, at han ikke overalt i Begrebernes Analyse skulde støde paa det Dialektiske [2]); men Tingen er,

---

[1]) „Es ist schwer sich einen bestimmten Begriff von dem, was Aristoteles eigentlich unter diesen Augenblicken gedacht hat, zu bilden. Keine Theile der Zeit und doch Grenzpuncte? Sind es nur Ruhepuncte für das Vorstellende, wenn es eine Reihe von Bewegungen durchläuft, und sie vorstellt. So scheint es. Wenn er aber behauptet, daß die Grenze nur dem angehöre, dessen Grenze es ist (τὰ μὲν γὰρ πέρατα ἐκείνου μόνου ἐστίν, οὗ ἐστι πέρατα. Physic. IV. c. 11), so muß man annehmen, daß auch der Augenblick etwas in der Zeit sey. Aber dieses läßt sich selbst nicht mit dem Begriff des Aristoteles von der Zeit vereinigen, daß sie ein Ganzes, dessen Theil jedesmal ein Zeittheil und ins Unendliche in Zeittheile getheilt werde, eine Folgerung, die selbst dann noch gültig ist, wenn er unter den Augenblicken bloß imaginäre Abschnitte sich gedacht hätte. Tennemann. Gesch. d. Phil. 3ten Band. S. 154—155.

[2]) „Uebrigens sind die Ergebnisse dieses Capitels" (Talen er om Physic. VI, 6) „ein Beispiel, wie die scharf und kräftig durchgeführte aristotelische Verfahrweise der abstract-verständigen Sonderung und Scheidung zuletzt auf ächt speculative Begriffbestimmungen führt: wie denn dieser Gegensatz von Stetigkeit der Veränderung und Plötzlichkeit — (Platon soll, wie Simplicius be-

at Aristoteles, istedetfor at holde fast paa Platos guddommelige Tanke, at Philosophien videnskabelig er Dialektik, og føre Tanken videre, tvertimod, hvad dette Punkt angaaer, affalder fra Ideen, nedsætter Dialektiken til et Underordnet, og maa desaarsag, hvor det kniber, hjælpe sig ved endelig Raisonneren frem og tilbage. Intetsteds i den hele aristoteliske Physik er vel Savnet af en exact Analyses Bistand mere føleligt end netop i de Afsnit, hvor Aristoteles benytter „Øieblikket", og sigter paa den zenoniske Sphinx; og intetsteds er Savnet af en gjennemført Dialektik mere føleligt end i den Reflexion, hvormed den dogmatiske Tænker undviger Modsigelsen, og saa gaaer „den flyvende Piil" imøde.

Endskjøndt Bevægelsen ingenlunde er, saaledes som Zeno har fremstillet Sagen, den Modsigelse, at det sig Bevægende skulde paa een Gang være i en Bevægelse udelukkende Hvile og en Hvile udelukkende Bevægelse, en Modsigelse, der i sin Uopløselighed vilde være et umiskjendeligt Tegn paa Nonsens; saa godtgjør dog Zenos Beviis, at der i enhver Bevægelse alligevel er, ihvormeget Aristoteles end søger at skjule det og snoe sig fra det, en Modsigelse, der i det Uendelige sættes og opløses; at Kategorien: Bevægelse, med andre Ord, ligesom Kategorierne: Vorden [1]) og For-

---

richtet, den Ausdruck ἐξαίφνης für den Begriff des Augenblicks gebraucht haben) — des durch die Veränderung hervorgerufenen seienden Zustandes, eine Knotenlinie von zeitlich-räumlichen oder andern zwischen Qualität und Quantität oscillirenden Maßverhältnissen, ganz unstreitig eine ächt speculative und dialektische, über die gemeine Reflexion weit hinausgehende und an den wichtigsten Folgen reiche Bestimmung ist." C. H. Weisse. Anfr. Skr. S. 602.

[1]) „Vorden er nemlig den Relation, som det Absolute selv er. Derfor alternerer det mellem Væren og Ikke-Væren, og er selv den fortsatte Række af begges Succession; thi hvad som vorder eller bliver til, hører deels til det Værende, forsaavidt som det allerede er Noget, deels til det Ikke-Værende, forsaavidt som det har en Fremtid, der endnu ikke er opfyldt; og begge Momenter

andring, er uendelig dialektisk. For at denne Dialektik imidlertid ikke ved at løsrives fra det Punktuelle skal faae Udseende af et Tankespil, hvori den virkelige Bevægelse forvandles til tom Ordbevægelse, ville vi sikkre Udviklingen ved exacte Forudsætninger, og desaarsag først tage den aristoteliske Behandling af Zenos fjerde Beviis med.

Det fjerde Beviis, hvorved Zeno angriber Bevægelsen, er, dersom dets overleverede Form ellers er authentisk, en saa iøinefaldende Sophisme, eller maaskee rettere: Paralogisme, at Aristoteles ikke saameget behøvede at gjendrive, som at afvise det, hvad han da ogsaa har gjort [1]). Tendensen i Beviset er ikke desto mindre afgjørende nok. Lod det sig virkelig bevise, at enhver Hastighedsforskjel forsvinder, naar Bevægelsen tænkes, da var Bevægelsens Utænkelighed med det Samme beviist. Den herunder hørende Modsigelse er Aristoteles neppe bleven opmærksom paa: han forudsætter uden videre en Forskjel af Hastigt og Langsomt, idet han hæver Bevægelsen, og forudsætter saa igjen Bevægelsen, idet han hæver Forskjellen mellem Hastigt og Langsomt [2]).

Ved et Indblik i den exacte Analyse bliver det først muligt at see, hvad der ligger i Problemet. Lad t. Ex. Bevægelsen paa to Baner, A og B, foregaae saaledes, at

---

danne en fortsat Række, fordi deres Afvexling er continueerlig, thi først naar Betragtningen standser i et eller andet bestemt Punkt, viser det Vordende sig som en Adskillelse af Momenterne, idet først da den ene Deel af det Vordende indbefattes under det Værende, og den anden under det Ikke-Værende." J. L. Heiberg. Perseus. Nr. 2. S. 23.

[1]) „Men det fjerde er det om de lige Masser, der bevæge sig frem i Banen mod hinanden fra modsatte Sider, den ene fra Banens Ende, den anden fra dens Midte: hvoraf skal følge, at den dobbelte Tid bliver lig den halve. Men Feilslutningen (ὁ παραλογισμός) ligger i den Fordring, at det Ene i Relation til det Hvilende skulle i lige Tid med lige Hastighed gjennemløbe lige Strækning. Dette er falsk (τοῦτο δὲ ψεῦδος)." Physic. VI, 9.

[2]) Jvfr. Phys. VI, 1, 2, 3 og VI, 9.

medens der paa A tilbagelægges een Miil i Timen, tilbagelægges der paa B otte Miil i samme Tidseenhed. Et ringe Kjendskab til Differential- og Integralregningens første Sætninger er da nok for at forstaae, at naar paa Banen A i endelig Tid Hastigheden $v = \frac{s}{t} = 1$, saa er ogsaa Øieblikshastigheden $\frac{ds}{dt} = 1$, og at paa Banen B, hvor Hastigheden $v_1 = \frac{s_1}{t} = 8$ i endelig Tid, maa Øieblikshastigheden ligeledes være $v_1 = \frac{ds_1}{dt} = 8$. Men saa let som det nu er, efterat det Uendeliges Analyse eengang er indført, at finde sig tilrette med den herhen hørende Operationsmechanik — det gaaer uden Hovedbrud ved en Smule Routine, som af sig selv —, saa umuligt har det været, og er det endnu for den med Analysen ubekjendte Reflexion at magte Opgaven og værge sig mod den Sophistik, som ved at benytte „Øieblikket" til at udjævne enhver Forskjel i Hastighed vil afskaffe Hastigheden selv, og gjøre Bevægelsen meningsløs.

I den uendelig lille Tidsdeel er, naar man holder sig til et alminbeligt Raisonnement, det Stykke Vei, der gjennemløbes paa B, ligesaavel uendelig lille, som det, der gjennemløbes paa A, ds_1 altsaa ligesaa vel uendelig lille som ds. „Men er $ds < ds_1$, hvordan kan ds_1 da være uendelig lille? Hvorledes er det muligt, hvorledes er det tænkeligt, at Noget skulde kunne være endnu mindre end det, som allerede er uendelig lille? Hvorledes er det muligt, hvorledes er det tænkeligt, at Noget skulde være større end det, som allerede er uendelig stort? Mathematikeren siger det! Ja, men Mathematikeren mener det ikke alvorligt med det Uendelige, han sætter i Tanken enten en tom Negation eller dog kun det Endelige. Mathematikeren betegner det Uendelige; men han tænker ikke Uendelighedens Tanke: det er ham i det Hele ikke saameget om Begreber som om Be-

tegnelser at gjøre, han tænker kun paa at faae sine Betegnelser saaledes indrettede, at Beregningen kan slaae til."

Er Reflexionen først hexet ind i den fixe Forestilling, at det Uendelige absolut maa være ligestort med sig selv: vil Modsætningen mellem Hastighed i endelig Tid og Dieblikshastighed let blive saa haard, at den kan optræde som kantisk Antinomie. Thesis: Der maa nødvendigviis gives forskjellige Dieblikshastigheder, efterdi der i Virkeligheden gives forskjellige Hastigheder. Antithesis: Da enhver Forskjel i den rene Dieblikshastighed er utænkelig, ere de saakaldte virkelige Hastighedsforskjelligheder umulige. For at bevise Thesis behøver man kun at gaae ud fra den endelige Forskjel mellem $\frac{s}{t}$ og $\frac{s_1}{t}$, og derfra slutte til en tilsvarende Forskjel mellem $\frac{ds}{dt}$ og $\frac{ds_1}{dt}$. For at bevise Antithesis begynde man med at sætte $ds = ds_1$, altsaa $\frac{ds}{dt} = \frac{ds_1}{dt}$, og uddrage saa heraf Slutningen: $\frac{s}{t} = \frac{s_1}{t}$. — At den ene uendelig lille Størrelse kan være, ikke blot større, men endog uendelig mange Gange større end den anden, den ene uendelig store Størrelse, ikke blot mindre, men endog uendelig mange Gange mindre end den anden, er virkelig et Paradox saa haardt og anstødeligt, at den saakaldte sunde Menneskeforstand snart vilde blive færdig med det, dersom ikke den exacte Analyse fra saa mangfoldige Sider fandt sig opfordret til at indskjærpe det, og derved kom til at opretholde dets Anseelse. Men „den sunde Forstand", der er saa enig med sig selv i at forkaste den Synsmaade, at der skulde kunne være Forskjel i det uendelig Lille og det uendelig Store, og at det Uendelige paa Grund heraf ikke skulde kunne indgaae under Begrebet: Størrelse,

er tillige enig med sig selv i at forkaste den Paastand, at der ikke skulde være en virkelig Forskjel imellem langsommere og hurtigere Bevægelse. At den raisonnerende Forstand ved saaledes at være enig med sig selv, netop er i Splid med sig selv, har den i sin umiddelbare Suffisance naturligviis ingen Forestilling om; men at Tingen ikke desto mindre forholder sig saaledes, er let at vise. Forskjellen mellem langsom og hurtig Bevægelse maa aabenbart beroe derpaa, at den første har mere, den anden mindre Hvile i sig, at den første altsaa er Hvilen nærmere, end den anden; en Bevægelse med uendelig lille Hastighed er jo netop Hvilen saa uendelig nær, at den kan betragtes som Hvile. Ikke destomindre er Modsætningen af Hvile og Bevægelse dog qvalitativ: hvad der hviler, bevæger sig ikke, hvad der bevæger sig, hviler ikke. Bortkaste vi nu de uendelige Størrelser, kan Hastighedsforskjellen kun forklares deraf, at den rene Bevægelse endelig afbrydes af Hvilen. At Legemet paa A i Tidseenheden t kun gjennemløber s, medens Legemet paa B gjennemløber $s_1 = 8\,s$, maa altsaa forstaaes saaledes, at hiint Legeme kun bevæger sig i $\frac{1}{8}$ t, men derimod hviler i $\frac{7}{8}$ t. Saalænge Tidseenheden, hvori en saadan Afvexling foregaaer, er 1 Time, er Hvilens Afvexling med Bevægelsen iøinefaldende; er Tidseenheden 1 Secund, er Afvexlingen mindre paafaldende, og tager sig ud som en stødviis Bevægelse; i en Tidseenhed af $\frac{1}{100}$ Secund vil Afvexlingen slet ikke mærkes, men Phænomenet vise sig som en jævn Bevægelse. At der paa A kun gjennemløbes 1 Miil, medens der paa B gjennemløbes 8 Miil, vil da, naar Hvilens Afvexling med Bevægelsen skeer i hver Hundrededeel af Secundet eller i Tiden τ, tage sig ud for Anskuelsen, som om Legemet paa A, trods dets ringere Hastighed, ligesaavel var i jævn og uafbrudt Bevægelse som Legemet paa B; medens Forklaringen dog er, at Bevægelsen paa A idelig afbrydes

af Hvilen, idet her til hver Bevægelse i Tidsdelen $\frac{1}{8}\tau$ svarer en Hvile i Tidsdelen $\frac{7}{8}\tau$. Skal Bevægelsen paa A være continuerlig, maae Tiden og Rummet være deelbare i det Uendelige; i dette Punkt har Aristoteles seet rigtigt. Men hvad Aristoteles ikke har seet og ikke kunnet see, forbi han manglede det Støttepunkt, som kun det Uendeliges Analyse kan give, er, at her ved denne Tidens og Rummets uendelige Deelbarhed netop danne sig uendelig smaae Størrelser med en saadan indbyrdes Forskjel, at de indgaae i bestemte Endelighedsforhold med hinanden.

Zenos Indvending, at det Legeme, som skulde være i Bevægelse, maatte paa een Gang være baade i Hvile og Bevægelse, har altsaa det Sande i sig, at enhver Bevægelse forudsætter en Hvile, som uophørlig er i Begreb med at indtræde, og som idelig ophæves. Det er i denne Sammenhæng indlysende, at Hegel har Ret, naar han anfører „Ophævelsen" blandt de dialektiske Kategorier. Vistnok er Hvilen ogsaa en ophævet Bevægelse, men denne Ophævelse er forsaavidt udialektisk, som Hvilen, endelig seet, ikke har den ophævede Bevægelse i sig, men udenfor sig; i Bevægelsen derimod er Hvilens Ophævelse, der skeer i hvert Tidselement, dialektisk, thi den ophævede Hvile er med i Bevægelsen selv, saa at Forskjellen mellem større og mindre Hastighed netop beroer paa den større eller mindre Energie, hvormed Hvilen ophæves: det Extensive gaaer ogsaa her op i det Intensive. Med Hvilens dialektiske Ophævelse ere da Zenos Indvendinger imod Bevægelsen tillige ophævede.

Vilde Nogen imidlertid gaae videre, og fordre Problemet løst saaledes, at Bevægelsen i Rummet blev opfattet og fastholdt i et Begreb, der udelukkede Anskuelsen: maatte vel en saadan Fordring siges at beroe paa en reen Misforstaaelse. Rum og Tid ere, for at minde om Kant, ikke rene Forstandsbegreber, men aprioriske Anskuelser. At ville

forvandle Anskuelsen til et abstract Forstandsbegreb, at ville opfatte det, som kun er for Anskuelsen, i et Begreb, der tilintetgjør Anskuelsen, er naturligviis meningsløst; saadanne Spørgsmaal, som: kan Rummet tænkes? kan Tiden tænkes? kan Bevægelsen tænkes? maae da i denne Forstand besvares ligefrem med Nei! Havde Zeno uden videre opstillet det som Fordring, at Den, der vilde tænke Bevægelsen, skulde tænke den uden Anskuelse, og udenfor Anskuelsen: da havde den i en saadan Fordring liggende Modsigelse vist været for iøinefaldende til at afgive et gjennem Aarhundreder gaaende Problem. Nei, Zeno forudsætter, at Rum, Tid og Bevægelse ere givne som Anskuelser, og fordrer saa, at disse Anskuelser tillige skulle lade sig opfatte i tilsvarende Begreber. Saalænge Begreb og Anskuelse ere i Strid, saa at det, der fremstiller sig for Anskuelsen som en Virkelighed, viser sig for Tanken som en Modsigelse og derved som en Umulighed, staaer Problemet uopløst; naar det derimod fra alle Sider er viist, at det i Bevægelsen, der umiddelbart fremstiller sig for Anskuelsen, tillige, forsaavidt det sees under Reflexionens Synspunkt, tilfredsstiller Tanken, har Problemet fundet sin Løsning.

c) Idealitetsproblemet.

Bevægelsens Dialektik er en Dialektik af Begreb og Anskuelse, og just derved en Dialektik af det Uendelige og det Endelige. At opløse det Endelige i det Uendelige saaledes, at det igjen fremgaaer deraf, er med andre Ord at paavise det Endeliges Idealitet. Da saadanne Videnskaber som Astronomie og Physik, hvis „ideale Princip", for at bruge et Udtryk af J. L. Heiberg [1]), „er Mathematik", nødvendigviis maae afgive Grundlaget, naar den kosmologiske Idee med sit reelle Indhold [2]) skal udvikles og fremstilles, maa Philosophien ved mangesidig

[1]) See „Perseus", Journal for den speculative Idee. Nr. 1. Til Læseren.

[2]) Jvfr. Phil. Propæd. S. 184.

Berøring med disse Videnskaber paa mangfoldige Maader see sig opfordret til at gjøre Brug af den høiere Analyse. Ideelæren kan nemlig ikke vinde reelt Indhold derved, at Abstractionens tomme Former udfyldes, for ikke at sige udstoppes med Exempler og Læresætninger, laante fra Astronomie og Physik; derimod kunne selv de meest concrete Phænomener gjennemklares af Idealitetens Lys, naar Ueudeligheden faaer en saadan Magt med det Endelige, at en Stoffets Forbrænding kan foregaae i Dialektikens Ildluft (πῦρ ἀεὶ ζῶον ἁπτόμενον μέτρα καὶ ἀποσβεννύμενον μέτρα).

En Idealisme, der egentlig kun bekymrer sig om det i endelig og materiel Forstand Virkelige, forsaavidt den overalt lægger an paa at opløse dette Virkelige som Configuration af det almene Begreb, som et i den rene Idee forsvindende Moment, har i Grunden ingen væsentlig Trang til at indlade sig med de exacte Analyser. I Hegels Logik staaer da ogsaa Behandlingen af det Mathematiske, henviist til et Par Anmærkninger, i en temmelig løs Forbindelse med Qvantitetskategoriernes dialektiske Udvikling; at den hegelske Methode conseqvent maa føre bort fra det Mathematiske, idet den fører bort fra de physiske Virkeligheds-analyser, viser hans Naturphilosophie, og navnlig hans Forklaring af Faldloven.[1])

Den Philosophie derimod, som, for at erkjende Tingenes Væsen og hævde Ideens Gyldighed, maa binde an med Kjendsgjerninger, og ved at optrævle Virkelighedens Knuder søge de ideelle Traade, har uafviselig Trang ikke blot til exacte Analyser, men til Realbegreber, der oprindelig tilhøre Videnskaber, „hvis ideale Princip er Mathematik." Men er Trangen væsentlig, da er ogsaa Fordringen uafviselig; hvorvidt det Mathematiske skal tages med i Philosophien, og de exacte Begreber inddrages i Dialektikens Strøm, vil altsaa ikke beroe paa den Philosopherendes Vil-

[1]) Jvfr. Phil. Propæd. S. 162—163.

kaarlighed, men paa Erkjendelsens Gang, paa Totalitetens Anlæg, paa Sagudviklingens nødvendige Methode [1]).

„Videnskabens Historie", siger Ramus [2]), „fremstiller det Factum, at de største Opdagelser i Physik og Astronomie, som saa kraftigen have indgrebet i Menneskehedens baade aandelige og sociale Liv, have været deels betingede af deels paa det Nøiagtigste forbundne med Opdagelserne af den mathematiske Analyses meest abstracte Sandheder. Er den høiere Mathematiks Studium langt og vanskeligt, saa afgive igjen dets Resultater en desto skjønnere Løn. Frugtesløse ere derimod de Philosophers Bestræbelser, som ville afkorte Veien ved mystiske og metaphysiske Speculationer." Men uagtet Mathematiken nu ganske vist er imod „de Philosophers Bestræbelser", som ved „mystiske Speculationer" ville gjøre saavel de exacte Analyser som Erfaringsvidenskabens Iagttagelser overflødige: er Mathematiken paa dens nuværende Trin dog alligevel den Videnskab, som, navnlig fra een Hovedside, fortrinlig egner sig til at corrigere „Speculationerne", og fremhjælpe den videnskabelige Metaphysik. Vistnok finder den chemiske Physiks Atomlære paa en vis Maade sin Stadfæstelse og Betingelserne for sin consequente Udvikling i Mathematiken; men Forestillingen om evige, i sig forhærdede Atomer (indivisibilia absoluta) lader sig umuligt bringe i Samklang med en Analyse, der deler Stoffet i det Uendelige, og forvandler Stofdelene til Functionspunkter. Den Sætning, at ethvert Element væsentlig er et Moment, er en Hovedsætning, som beviser, i hvilken Grad de exacte Analyser maae kunne bidrage til at give Virkelighedsidealismen det rette aprioriske Grundlag, naar de Begreber, der oprindelig udvikles i Mathematiken, opfattes og bearbeides af Dialektiken.

---

[1]) Jvfr. Phil. Propæd. S. 111—117.
[2]) Differential- og Integralregning. Fortale.

Indhold.

I.

Functionsbegrebet.

Side.

a) **Functionsbegrebets oprindelige Reqvisiter** . . . . 4—12.
α) En constant og en variabel Størrelse. β) To variable Størrelser, en afhængig og en uafhængig. γ) Grundforhold mellem de to Variable.

b) **Functionen og Loven** . . . . 12—20.
α) Tilfældet. β) Reglen. γ) Loven.

c) **Functionsbegrebets eiendommelige Fremstilling** . . . . 20—27.
α) Sproget. β) Tanken. γ) Sproget og Tanken.

II.

Uendelighedsproblemet.

a) **Det Endelige i dets umiddelbare Forskjel fra det Uendelige** . . . . 28—33.
α) Det Uendelige udenfor det Endelige. β) Det Uendelige indenfor det Endelige. γ) Det Endeliges og det Uendeliges dialektiske Enhed.

b) **Det Endeliges Overgang i det Uendelige: Tilnærmelsen.** 34—38.
α) Et Opnaaeligt: Tilnærmelse af Endeligt til Endeligt. β) Et Uopnaaeligt: Tilnærmelse af Endeligt til Uendeligt. γ) Den uendelige Tilnærmelse.

c) **Tilnærmelsen i punktuel Udvikling** . . . . 38—56.
α) Mathematisk-logiske Overgange. αα) Analysens og Synthesens exacte Anvendelse: Operation. ββ) Analyse paa synthetisk Grundlag: Transformation.

Side.

$\gamma\gamma$) Synthese paa analytisk Grundlag: Combination.
β) Functionssystemer: den indre Uendelighed.
$\alpha\alpha$) Functionssystemernes Grundformel: Reduction.
$\beta\beta$) Særskilte Functionssystemer: Deduction. $\gamma\gamma$) Tilvæxter og Rester: Articulation.

III.

Det Uendeliges Analyse.

a) **Functionsgrændsen: det Endeliges dialektiske Berøring med det Uendelige** . . . . 57—76.
α) Uendelige Rækkers Afbrydelse: Grændsen som uopnaaelig. β) Rækkernes væsentlige Afslutning: Grændsen som opnaaelig. γ) Uendelige Størrelser: Begrændsningens Dialektik.
b) **Differentialet: Momentets Dialektik** . . . . 78—97.
α) Differential og Differentialcoefficient: Forholdsstørrelse. β) Differentialofficienternes forskjellige Orden: System af Forholdsstørrelser. γ) Differentiationsprinciper: den ved Forholdsconseqvenserne bestemte Methode.
c) **Integralet: Elementet og den endelige Størrelse** . . 98—115.
α) Integrerende Summation: Moment og Element. β) Integrationsprinciper: afledede Functioners Forhold til de oprindelige. γ) Det bestemte Integral: Uendelighedsproblemets Løsning.

Slutning.

a) Delingsproblemet . . . . 116—131.
b) Bevægelsesproblemet . . . . 131—146.
c) Idealitetsproblemet . . . . 146—148.

Rettelser.

S. 38.	Linie 9 og 14	fr. ov.	Assymptote,	læs:	Asymptote.
- 40.	— 13	—	analythisk	—	analytisk.
- 43.	— 23	fr. ned.	retvinklene	—	retvinklede.
- 45.	— 2	fr. ned.	A	—	A_1 og
			$\frac{1}{a}$	—	$\frac{1}{A_1}$.
- 46.	Anm.		$l(a)^{n-1}$	—	$(l.a)^{n-1}$.
- 50.	Anm. Linie 1	—	impiriske	—	empiriske.
- 55.	Linie 1	fr. ov.	Da nemlig	—	Er nemlig.
- 59.	— 5	—	Reduction	—	Reduction,
	6	—	hianden	—	hinanden.
- 67.	— 13	—	nte Led	—	mte Led.
- 75.	— 12	—	$(a-x)\,l^{\frac{1}{a-x}}$	—	$(a-x)\,e^{\frac{1}{a-x}}$.
- 81.	— 1	—	bive	—	blive.
- 90.	— 9	fr. ned.	Benouilli	—	Bernoulli.
- 94.	— 9	fr. ov.	Differentialcoesficient,	læs:	Differentialcoefficient.
- 94.	— 7	fr. ned.	heeel,	læs:	heel.
- 96.	— 9 og 14	fr. ov.	$\frac{dx}{1}$, $\frac{dx^2}{1.2}$	—	$\frac{dx}{1.2}$, $\frac{dx^2}{1.2.3}$ og
	10	—	dx	—	$\frac{dx}{1.2}$.
- 101.	—	fr. ov.	er Delene	—	er Delen.
- 105.	— 5 og 4	fr. ned.		—	$\text{Lim}\left(1+\frac{1}{n}\right)x^2 = x^2$.
- 110.	— 3	—	$\int\frac{x^m\,dx}{l\,(x)^n}$	—	$\int\frac{x^m\,dx}{(l.x)^n}$.
	2	—	$\int\frac{x^m\,dx}{l x^{n-1}}$	—	$\int\frac{x^m\,dx}{(l.x)^{n-1}}$.
	sidste	—	$\int\frac{x^m\,dx}{l.x}$	—	$\int\frac{x^m\,dx}{l.x}$, for n positiv heel,

THE NEW YORK PUBLIC LIBRARY
REFERENCE DEPARTMENT

This book is under no circumstances to be taken from the Building

Form 410